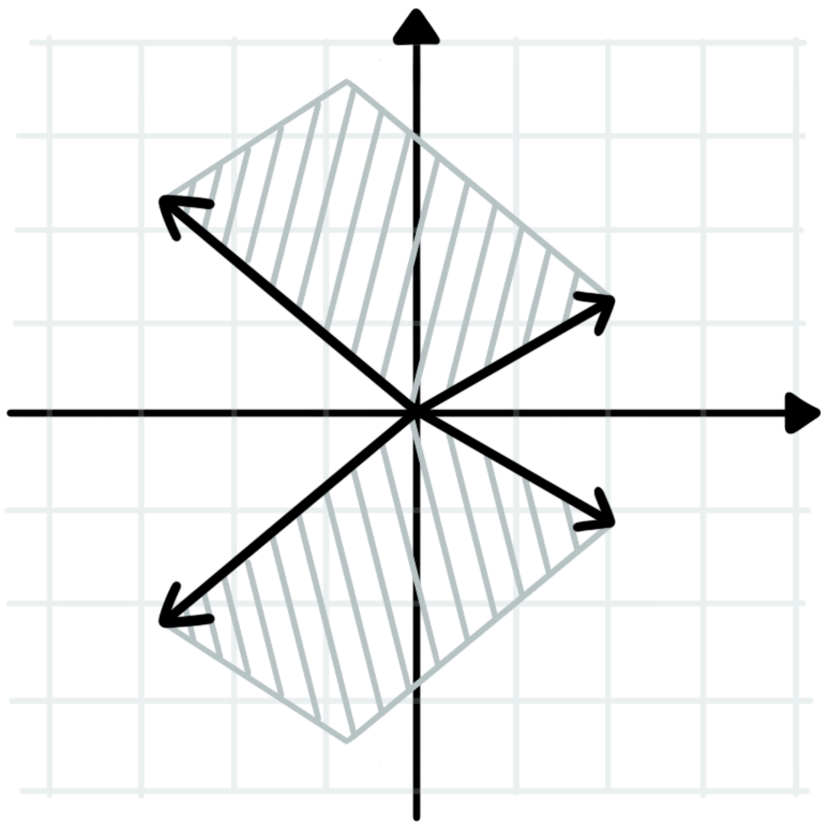
선형대수 복습노트

디멘(최정담)



1. 행렬과 벡터의 연산

Notation. v는 벡터를 의미하고 **x**는 F^n의 원소를 의미함. v를 기저 $\mathscr{B}$의 좌표로 나타낸 것을 $\mathbf{v}_{\mathscr{B}}$ 또는 $[v]_{\mathscr{B}}$로 적음. **v**는 v를 표준 기저의 좌표로 나타낸 것이며, 혼돈의 여지가 없을 때 v와 **v**를 혼용함. 마찬가지로 T는 선형 변환을 의미하고 **M**은 $M_{n\times m}$의 원소를 의미한다. T: V → W에 대해 $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$는 V를 기저 B로 표현하고 W를 기저 C로 표현했을 때 T가 나타내는 변환을 행렬로 적은 것이다.

행분해와 열분해

Row : $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} u_1 x \\ u_2 x \end{pmatrix}$

Column : $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$

- **x**, **y**가 열벡터일 때, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$
- A: n × m 행렬, B: m × r 행렬 ⇒ $AB = A[\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_r] = [A\mathbf{b}_1 \ldots A\mathbf{b}_r]$

기저 변환

좌표의 기저변환. V의 기저 $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots v_n\}$에 대해 벡터 x ∈ V의 좌표 $\mathbf{x}_{\mathscr{B}}$는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}_{\mathscr{B}} = B^{-1}\mathbf{x} \quad \text{where} \quad B = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$$

즉, $\mathscr{B}$에서 표준 기저로의 번역은 $\mathbf{x}_{\mathscr{B}} \mapsto \mathbf{x} = B\mathbf{x}_{\mathscr{B}}$이다. (*Note.* B는 복호화, B^{-1}은 암호화로 생각할 수 있음)

선형변환의 기저변환. V의 기저 $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots v_n\}$에 대해 선형변환 T: V → W의 행렬 $\mathbf{T}_{\mathscr{B}}$는 다음과 같다.

$$\mathbf{T}_{\mathscr{B}} = B^{-1}TB$$

증명. $\mathbf{x}_{\mathscr{B}} \xrightarrow{B} \mathbf{x} \xrightarrow{T} \mathbf{y} \xrightarrow{B^{-1}} \mathbf{y}_{\mathscr{B}}$

2. 추상 벡터 공간

추상 벡터 공간

정의. 체 F 위에서 정의된 벡터 공간 (V, +, ·)은 다음 공리를 만족한다.

1. (V, +)는 아벨군이다.
2. (스칼라 곱에 대한 결합법칙) $k_1(k_2v) = (k_1k_2)v$
3. (스칼라 곱에 대한 분배법칙) $k(u + v) = ku + kv$
4. (스칼라 곱에 대한 항등원) $\exists 1 \in F : 1v = v$

정리.

1. $k0 = 0$
2. $0v = 0$
3. $(-1)v = -v$

직합

정의. 두 벡터공간 U, V에 대해 $W = U + V$이고, 임의의 $w \in W$에 대해 $w = u + v$로 나타내는 방식이 유일할 때 W를 U와 V의 직합이라고 하며 $W = U \oplus V$라고 적는다.

정리. $\{U_i\}$가 V의 부분공간일 때 다음은 동치이다.

1. $V = U_1 \oplus U_2$
2. $V = U_1 + U_2$이고 $u_1 + u_2 = 0$ only if $u_1, u_2 = 0$
3. $V = U_1 + U_2$이고 $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

벡터 공간의 분해. V가 유한 차원 공간이고 $U \leq V$일 때 $\exists W \leq V : V = W \oplus U$.

선형 사상

정의. 체 F 위의 벡터 공간 U, V에 대하여 다음 공리를 만족하는 사상 $T: U \to V$를 선형 사상이라고 한다.

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$

2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

정리. 선형 사상 $T: V \to W$에 대해 V가 유한 차원일 때, $\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{ran} T$

따름정리. $T \in L(V, V)$에 대해 “T는 역사상을 가진다” iff “T는 전사이다” iff “T는 단사이다”

따름정리. 동일한 차원의 유한 차원 벡터 공간은 동형이다.

정리. U에서 V로 가는 선형 사상들의 공간 $L(U, V)$는 벡터 공간이다.

정리. $\dim L(U, V) = \dim U \times \dim V$

정리. V가 F-벡터 공간이고 $p \in F[x]$일 때 $T \in L(V)$에 대해 $p(T)(x) = T(p(x))$이다.

3. 고유벡터와 고윳값

불변성

정의. $T \in L(V)$와 V의 부분공간 U에 대해 $u \in U \Rightarrow T(u) \in U$일 때 T를 U에 대해 불변이라고 한다.

정리. 유한 차원 복소 벡터 공간 위의 선형 사상은 차원이 1인 어떤 부분공간에서 불변이다.

증명. $v \in V$라고 하자. $\dim V = n$이라면 $\{v, Tv, T^2v, \ldots, T^nv\}$는 선형 종속이므로 $a_0v + a_1Tv + \ldots + a_nT^nv = 0$인 $\{a_i\}$가 존재한다. m이 $a_m \neq 0$인 가장 큰 정수라고 하자. $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mz^m$는 $C[x]$에서 $c(z - \lambda_1)\ldots(z - \lambda_m)$로 인수분해된다. 그러면 $a_0v + a_1Tv + \ldots + a_nT^nv = c(T - \lambda_1I) \ldots (T - \lambda_mI)v = 0$이므로, 어떤 k에 대해 $T - \lambda_kI$는 단사가 아니다.

정리. 유한 차원 실수 벡터 공간 위의 선형 사상은 차원이 1이거나 2인 어떤 부분공간에서 불변이다.

정리. $T \in L(V)$이고 $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$이 V의 기저라고 하자. TFAE:

1. $\mathscr{B}$에 대한 T의 행렬은 삼각행렬이다.
2. $Tv_k \in \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)$
3. $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)$는 T에 대해 불변이다.

고유벡터와 교윳값

정의. TFAE

1. $T \in L(V)$가 차원이 1인 V의 부분공간에 대해 불변일 때 해당 부분공간의 기저를 고유벡터라고 한다.
2. 어떤 스칼라 λ에 대해 $Tv = \lambda v$를 만족하는 v를 고유벡터라고 하고 λ를 고윳값이라고 한다.
3. $T - \lambda I$가 단사가 아니게 되는 λ를 고윳값이라고 한다.

정리. 모든 복소행렬은 적어도 하나의 고윳값을 가진다.

정리. 서로 다른 고윳값을 가지는 고유벡터들은 선형 독립이다.

증명. k를 $v_k \in \text{span}(v_1, \ldots, v_{k-1})$이 되는 가장 작은 정수라고 하자. 즉, $v_k = a_1v_1 + \ldots + a_{k-1}v_{k-1}$이다. 양변에 T를 취하면 $Tv_k = \lambda_k v_k = a_1\lambda_1 v_1 + \ldots + a_{k-1}\lambda_{k-1}v_{k-1}$이다. 좌변에 $v_k = a_1v_1 + \ldots + a_{k-1}v_{k-1}$을 대입하서 정리하면 $a_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \ldots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_k = 0$을 얻는다. 따라서 어떤 $i < k$에 대해 $v_i \in \text{span}(v_1, .., v_{k-1})$이므로 가정에 모순.

정리. 모든 복소행렬은 삼각행렬을 닮은 행렬로 가진다.

증명.

대각화

정리. $n \times n$ 행렬 **A**가 대각화 가능할 필요충분조건은 A가 n개의 선형 독립인 고유벡터를 가지는 것이다. 구체적으로, $\{v_1, \ldots, v_n\}$가 A의 선형 독립인 고유벡터들이고 각 v_i의 고윳값이 λ_i일 때, 다음이 성립한다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]^{-1}$$

Remark. 행렬 **A**의 대각화는 A가 (암호화) → (확장) → (복호화)로 표현되는 기저를 찾는 과정

4. 내적 공간

내적 공간과 노름

정의. 체 F (F는 실수 또는 복소수) 위에서 정의된 벡터 공간 V에 대해 연산 $\cdot : V \times V \rightarrow F$가 내적이라는 것은 다음 공리를 만족한다는 것이다.

1. $\langle v, v \rangle \ge 0$, 등호는 $v = 0$일 때만 성립
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

   cf: $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
3. $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$
4. $\langle u, v \rangle = \text{conj} \langle v \cdot u \rangle$

   cf: $\langle u, av \rangle = \text{conj}(a) \langle u \cdot v \rangle$

정의. 체 F (F는 실수 또는 복소수) 위에서 정의된 벡터 공간 V에 대해 연산 $|| \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}^+$가 노름이라는 것은 다음 공리를 만족한다는 것이다.

1. $||x|| \ge 0$, 등호는 $x = 0$일 때만 성립
2. $||ax|| = |a| \, ||x||$
3. $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$

정리. $||u|| := \text{sqrt}\langle u, u \rangle$는 노름이다

평행사변형 정리. $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$

피타고라스의 정리. $u \cdot v = 0$이라면 $||u||^2 + ||v||^2 = ||u + v||^2$

코시-슈바르츠 부등식. $|\langle u, v \rangle| \le ||u|| \, ||v||$

증명. u + v를 u에 대해 직교 분해해서 증명 (직교 분해의 가능성은 중간값 정리에 의해 보장)

직교 기저

정의. $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$가 V의 기저이고 각 i에 대해 $\|v_i\| = 1$이며 $\langle v_i, v_j\rangle = 0$일 때 $\mathscr{B}$는 정규 직교 기저이다.

그람-슈미트 분해. $\{v_1, \ldots, v_n\}$이 선형 독립인 벡터의 집합일 때, $1 \le m \le n$에 대해 span $\{v_1, \ldots, v_m\}$ = span $\{u_1, \ldots, u_m\}$인 직교 벡터들의 집합 $\{u_1, \ldots, u_n\}$이 존재한다.

따름정리. 모든 유한 차원 공간은 정규 직교 기저를 가진다.

정리. $T \in L(V)$가 어떤 기저에 대해 삼각행렬을 표현으로 가질 때, T는 직교 기저에 대해 삼각행렬을 표현으로 가진다.

증명. $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$에 대해 $[T]_{\mathscr{B}}$가 삼각행렬이라는 것은 $1 \le j \le n$에 대해 $\{v_1, \ldots v_j\}$가 T에 대해 불변이라는 것이므로 그람-슈미트를 적용할 수 있다.

따름정리: 슈어의 정리. 복소 벡터 위의 선형 변환은 어떤 직교 기저에 대해 삼각행렬로 표현된다.

직교 분해

정의. $U \le V$에 대해 $U^\perp := \{ v \in V \mid \forall u \in U : \langle u, v\rangle = 0 \}$ (Check: $U^\perp$는 벡터 공간이다)

정리.

1. $V = U \oplus U^\perp$
2. $U = (U^\perp)^\perp$

최소화 문제. $U \le V$, $v \in V$에 대해 $\|v - \pi_U(v)\| \le \|v - u\|$이며 등호는 $u = \pi_U(V)$일 때 성립한다.

Remark. 최소화 문제는 초월함수의 근사 등에 사용될 수 있다 (cf. Linear algebra done right, p.115)

5. 디터미넌트

디터미넌트

정의. 다음을 만족하는 함수 det: $M_n(F) \to \mathbb{R}$를 디터미넌트라고 한다.

1. det I = 1
2. 다중 선형 사상이다. 즉, det [… k**u** + **v** …] = k det [… **u** …] + det [… **v** …]
3. det [… **u** … **u** …] = 0

디터미넌트 공식.

1. det cA = c^n det A
2. det [… **u** … **v** …] = - det[… **v** … **u** …]
3. det [… **u** … **v** …] = det [… **u** + k**v** … **v** …]
4. 위삼각행렬의 디터미넌트는 대각선 성분의 곱이다.

Remark. 위 4개의 공식은 가우스 소거법에 대해 디터미넌트를 추적하는 방법을 제공한다.

정리. $\{v_1, \ldots, v_n\}$이 선형 종속이다 ⇔ det $[\mathbf{v_1} \ldots \mathbf{v_n}] = 0$

증명. $\{v_1, \ldots, v_n\}$가 선형 종속이라면 A = $[\mathbf{v_1} \ldots \mathbf{v_n}]$는 가우스 소거법을 거치면 0행을 가진다. 0행을 가지는 행렬은 2에 의해 디터미넌트가 0이며, 가우스 소거법은 nonzero determinant를 보존한다.

정리. 디터미넌트는 유일하다.

증명. f, g가 디터미넌트라고 하자. f(**A**) = 0인 경우 **A**의 행들은 선형 종속이므로 g(**A**) = 0이다. f(**A**) ≠ 0인 경우, 가우스 소거법을 통해 f(**A**) = kf(**I**) = k이다. 여기서 k는 가우스 소거법에 의해서만 결정되므로, g(**A**) = k이다.

정리. 디터미넌트는 곱셈적 함수이다.

증명. 함수 $\phi: M_n(F) \to \mathbb{R}$ def by **X** ↦ det(**AX**)는 1을 제외한 디터미넌트의 정의를 만족함을 보일 수 있다. 따라서 det(**AX**) = k det(**X**) for some k ∈ F이다. **X** = **I**를 대입하면 k = det(**A**)를 얻는다.

따름정리.

1. det $\mathbf{A}^{-1}$ = (det $\mathbf{A}$)$^{-1}$
2. $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$라면 det $\mathbf{A}$ = det $\mathbf{B}$이다.

   Remark. 위 정리는 디터미넌트가 행렬에 대한 함수일 뿐 아니라 선형 사상에 대한 함수임을 시사한다.

   따름정리. $\{v_1, \ldots, v_n\}$이 선형 종속이다 ⇔ det $[v_1 \ldots v_n] = 0$

특성방정식과 중복도

정의. A의 특성방정식은 det(A - xI) = 0이다.

정리. 특성방정식의 근은 고윳값이다.

정의.

1. 고윳값 λ의 기하적 중복도는 $\{ v \in V : Av = \lambda v \}$의 차원이다.
2. 고윳값 λ의 대수적 중복도는 특성방정식에서 $x = \lambda$의 중복도이다.

정리. A와 B가 닮은 행렬이라면 둘의 특성방정식은 같다.

증명. $\det(PAP^{-1} - xI) = \det(PAP^{-1} - P(xI)P^{-1}) = \det(P\,(A - xI)\,P^{-1}) = (\det P)(\det(A - xI))(\det P^{-1}) = \det(A - xI)$

Remark. 위 정리는 특성방정식이 행렬에 대한 방정식일 뿐 아니라 선형 사상에 대한 방정식임을 시사한다.

따름정리. 기하적 중복도 ≤ 대수적 중복도

따름정리. T가 대각화 가능할 필요충분조건은 모든 λ에 대해 (대수적 중복도) = (기하적 중복도)인 것이다.

6. 쌍대 공간

쌍대 공간

정의. 체 F 위 벡터 공간 V의 쌍대 공간 V*은 ({ ϕ: V → F : ϕ는 선형적 }, +, ·)인 F-벡터 공간이다. 또한, V*의 원소들을 범함수functional이라고 부른다.

쌍대-내적 대응. $\phi \in V^*$라면 임의의 $u \in V$에 대해 $\phi(u) = \langle u, v_\phi \rangle$가 되도록 하는 벡터 v_ϕ가 유일하게 존재한다.

증명. $\{e_1, \ldots, e_n\}$을 V의 직교 기저라고 하자. 그러면 $\phi(u) = \phi(\langle u, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle u, e_n\rangle e_n) = \langle u, e_1\rangle\phi(e_1) + \ldots + \langle u, e_n\rangle\phi(e_n) = \langle u, v_\phi := \mathrm{conj}(\phi(e_1))e_1 + \ldots + \mathrm{conj}(\phi(e_n))e_n\rangle$

Remark. 위의 증명은 쌍대 공간이 $v \mapsto \langle \cdot , v \rangle$를 통해 원 공간과 일대일 대응 관계에 있음을 시사한다.

어드조인트

정의. $T \in L(V, W)$에 대해 $(v \mapsto \langle Tv, w\rangle) \in V^*$가 $v \mapsto \langle v, T^*w\rangle$와 같아지는 $T^* \in L(W, V)$가 쌍대-내적 대응에 의해 유일하게 존재한다. T*을 T의 어드조인트라고 한다.

정리.

1. $T^{**} = T$
2. $(aT)^* = \mathrm{conj}(a)\, T^*$
3. $(S + T)^* = S^* + T^*$
4. $(ST)^* = T^*S^*$
5. $I^* = I$

정리. $T \in L(V, W)$에 대해 다음이 성립한다.

1. $\mathrm{null}\ T^* = (\mathrm{range}\ T)^\perp$
2. $\mathrm{range}\ T^* = (\mathrm{null}\ T)^\perp$
3. $\mathrm{null}\ T = (\mathrm{range}\ T^*)^\perp$
4. $\mathrm{range}\ T = (\mathrm{null}\ T^*)^\perp$

증명. $w \in \text{null } T^* \Leftrightarrow T^*w = 0 \Leftrightarrow \forall v \; \langle T^*w, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall v \; \langle w, Tv\rangle = 0 \Leftrightarrow w \in (\text{range } T)^\perp$

쌍대의 전치

정리. $T \in L(V, W)$라고 하자. $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$와 $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$가 각각 V와 W의 정규 직교 기저일 때, 다음이 성립한다.

$$\left[T^*\right]_F^E = \left(\left[T\right]_E^F\right)^\dagger$$

여기서 $\dagger$는 복소 전치 연산이다.

7. 스펙트럼 정리

자기 어드조인트

정의. $T \in L(V)$에 대해 $T = T^*$일 때 T를 자기 어드조인트self-adjoint라고 한다.

복소 어드조인트 판별법. $T \in L(\mathbb{C})$가 자기 어드조인트이다 $\Leftrightarrow \forall v \in V : \langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$

증명.

Claim 1) $\forall v\ \langle Tv, v\rangle = 0 \ \Rightarrow\ T = 0$

Pf1) $\langle Tu, w\rangle = (\langle T(u + w), u + w\rangle - \langle T(u - w), u - w\rangle + \langle T(u + iw), u + iw\rangle - \langle T(u - iw), u - iw\rangle)/4 = 0$

Claim 2) $\forall v\ \langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \forall v, w\ \langle Tv, w\rangle \in \mathbb{R}$

Pf2) Pf1과 동일

본 증명: Claim 2에 의해 $\langle u, Tw\rangle = \langle Tw, u\rangle = \langle w, T^*u\rangle$ 이므로 $\langle u - w, Tw - T^*u\rangle = 0$. 마찬가지 논리로 $\langle u - w, Tu - T^*w\rangle = 0$. 따라서 $\langle u - w, (T^* - T)(u - w)\rangle = 0$. Claim 1에 의해 $T^* = T$.

자명한 어드조인트 판별법. $T \in L(V)$가 자기 어드조인트라면, $\forall v \in V : \langle Tv, v\rangle = 0 \Leftrightarrow T = 0$

증명. V가 복소 벡터 공간일 때 Claim 1에 의해 증명, 실수 벡터 공간일 때 $\langle Tu, w\rangle = (\langle T(u + w), u + w\rangle - \langle T(u - w), u - w\rangle)/4$를 이용해 증명.

정규성

정의. $T \in L(V)$에 대해 $TT^* = T^*T$일 때 T를 정규normal라고 한다. (Remark: 자기 어드조인트 $\Rightarrow$ 정규)

정규 판별법. $T \in L(V)$가 정규이다 $\Leftrightarrow \forall v \in V : \|Tv\| = \|T^*v\|$

정규 고유벡터의 켤레. T가 정규라고 하자. v가 고윳값이 λ인 T의 고유벡터라면 v는 고윳값이 $\mathrm{conj}(\lambda)$인 T^*의 고유벡터이다.

증명. $0 = \|(T - \lambda I)v\| = \|(T - \lambda I)^*v\| = \|(T^* - \mathrm{conj}(\lambda)I)v\|$

정규 변환의 직교성. T가 정규라면, T의 고유백터들은 서로 직교한다. (normal의 어원)

증명. u, v의 고윳값이 α, β라면 $(\alpha - \beta)\langle u, v\rangle = \langle \alpha u, v\rangle - \langle u, \mathrm{conj}(\beta)v\rangle = \langle Tu, v\rangle - \langle u, T^*v\rangle = 0$

스펙트럼 정리

복소 스펙트럼 정리. $T \in L(\mathbb{C})$에 대해, T가 정규이다 ⇔ T의 고유벡터들은 V의 직교 기저이다

증명.

(⇐) T의 고유벡터들로 이루어진 직교 기저를 $\mathscr{B}$라고 하면 $[T]_{\mathscr{B}}$는 대각행렬이다. T^*의 행렬 표현은 같은 기저 하에서 T의 전치이므로, $[T^*]_{\mathscr{B}}$ 또한 대각행렬이다. 대각행렬은 교환법칙을 만족하므로 $TT^* = T^*T$이다.

(⇒) $[T]_{\mathscr{B}}$가 삼각행렬이 되도록 하는 직교 기저 $\mathscr{B}$가 존재한다. $[T]_{\mathscr{B}} = ([T^*]_{\mathscr{B}})^\dagger$와 $\|Tv\| = \|T^*v\|$로부터 얻어짐.

어드조인트 스펙트럼 정리. 자기 어드조인트 변환은 고윳값을 가진다.

증명.

> 보조정리. $T \in L(V)$가 자기 어드조인트이고 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$에 대해 $\alpha^2 < 4\beta$일 때 $T^2 + \alpha T + \beta I$는 가역이다.
>
> 증명. $\langle (T^2 + \alpha T + \beta I)v, v\rangle = (\|Tv\| - |a|\,\|v\|/2)^2 + (\beta - \alpha^2/4)\|v\|^2 > 0$.

이제 “실수 변환은 차원이 1 또는 2인 불변 부분공간을 가진다”의 증명을 발전시키면 됨.

Remark. 자기 어드조인트 변환의 고윳값은 모두 실수이다.

증명. $Tv = \lambda v$일 때, $\lambda\|v\|^2 \langle Tv, v\rangle = \langle v, T^*v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \mathrm{conj}(\lambda)\|v\|^2$

실수 스펙트럼 정리. $T \in L(\mathbb{R})$에 대해, T가 자기 어드조인트이다 ⇔ T의 고유벡터들은 V의 직교 기저이다

증명.

(⇐) 복소 스펙트럼 정리와 같음

(⇒) dim V에 대한 귀납법: dim V = 1일 때 자명.

T가 자기 어드조인트이므로 고윳값 λ를 가진다. $u \in V$를 λ의 고유벡터 중 노름이 1인 벡터라고 하고, U = span {u}라고 하자. $v \in U^\perp$에 대해 $\langle u, Tv\rangle = \langle Tu, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle = 0$이므로 $Tv \in U^\perp$이다. 즉 $U^\perp$는 T에 대해 불변이므로 $S = T|U^\perp$는 연산자이며, 특히 자기 어드조인트이다. 귀납 가정에 의해 S의 고유벡터들은 $U^\perp$의 직교 기저 $\mathscr{B}$를 이룬다. $\mathscr{B}$에 u를 추가하여 U의 직교 기저 $\mathscr{B}'$를 얻는다.