범주론 복습노트

디멘(최정담)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Grp} \arrow[d, "U"] \\
\mathbf{Mon} \arrow[u, bend left=60, "F"] \arrow[u, bend right=60, "R"']
\end{tikzcd}$$

1. 기본 개념

범주

정의. 범주 $\mathcal{A}$는 다음으로 이루어진다.

1. 대상$_{\text{object}}$들의 모임 $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$
2. 각 $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$에 대해, A에서 B로 가는 사상$_{\text{morphism}}$들의 모임 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$
3. 각 $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$에 대해, 합성연산 $\cdot : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C)$
4. 각 $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$에 대해, $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$

이들은 다음 공리를 만족한다.

A1. <u>결합법칙</u>: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

A2. <u>항등법칙</u>: $1_A \cdot f = f$, $g \cdot 1_A = g$

정의. 카테고리 $\mathcal{A}$의 사상을 모두 역방향으로 취한 카테고리를 **쌍대$_{\text{dual}}$** 카테고리 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$라고 한다.

정의. $f: A \to B$가 **동형사상$_{\text{isomorphism}}$**이라는 것은 $g: B \to A$가 존재하여 $gf = 1_A$, $fg = 1_B$인 것이다.

예시.

범주	대상	사상
Set	집합 A	함수 $f: A \to B$
Grp	군 G	준동형사상$_{\text{homomorphism}}$ $\phi: G \to H$
Top	위상공간 X	연속함수 $f: X \to Y$
$\mathbf{Vect}_k$	체 k를 스칼라로 가지는 벡터공간 V	선형사상 $T: V \to W$
G	형식적 대상 o	군 G의 원소 g에 대해, 사상 $g: o \to o$
$(\mathbb{N}, \leq)$	자연수 n	$n \leq m$일 때 유일하게 존재하는 사상 $(n, m): n \to m$

Remark. G^{op}는 군 G의 각 원소를 그 역원으로 치환한 범주이고, $(\mathbb{N}, \leq)^{\mathrm{op}}$는 $\leq$를 $\geq$로 뒤집은 범주임을 확인하라.

함자

정의. 카테고리 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$에 대해 **함자**$_{\textbf{functor}}$ F: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$는 다음으로 이루어진다.

1. $A \in \mathcal{A}$에 대해, $F(A) \in \mathcal{B}$
2. $f: A \to A'$에 대해, $F(f): F(A) \to F(A')$

이들은 다음 공리를 만족한다.

A1. <u>합성법칙</u>: $f: A \to A'$, $f' : A \to A''$일 때 $F(f'f) = F(f')F(f)$

정의. 함자 F: $\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$를 $\mathcal{A}$에서 $\mathcal{B}$로 가는 **반변**$_{\textbf{contravariant}}$ **함자**라고 한다.

예시.

1. 군의 구조를 잊어버리는 망각함자 U: **Grp** → **Set**과, 집합을 자유군으로 만드는 자유함자 F: **Set** → **Grp**가 존재한다.
2. $W \in \mathbf{Vect_k}$를 생각하자. $V, V' \in \mathbf{Vect_k}$에 대해 $T: V' \to V$가 주어지면 이로부터 $T^*: \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V', W)$을 $f \mapsto fT$와 같이 정의할 수 있다. 즉, $\mathrm{Hom}(-, W)$: $\mathbf{Vect_k}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Vect_k}$는 반변 함자이다.
3. **Top***를 위상공간과 그 공간의 한 점의 쌍 (X, x_0)으로 이루어진 범주라고 하자. 각 점-공간 쌍을 그 기본군에 대응시키는 함자 π_1 : **Top*** → **Grp**가 존재한다. π_1이 함자임은 연속함수 $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$가 준동형사상 $f^*: \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$를 유도한다는 사실로써 보증된다.
4. 모노이드 M을 범주로 생각하자. **M**에서 **Set**으로 가는 공변 함자는 좌측 M-set이고, 반변 함자는 우측 M-set이다.

정의. F: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$가 함자라고 하자. 임의의 $A, A' \in \mathcal{A}$에 대해 $(\ f: A \to A'\ ) \mapsto (\ F(f): F(A) \to F(A')\ )$가 전사/단사일 때 F를 **충만**$_{\textbf{full}}$**/충실**$_{\textbf{faithful}}$이라고 한다.

정의. F: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$가 함자라고 하자. 임의의 $B \in \mathcal{B}$에 대해 $F(A) = B$이거나 $F(A) \cong B$인 $A \in \mathcal{A}$가 존재할 때 F를 **실질적으로 전사**$_{\textbf{essentially surjective}}$라고 한다.

Remark. 함자의 치역은 범주가 아닐 수 있다.

자연적 변환

정의. 함자 F, G: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$에 대해 **자연적 변환**natural transformation η: F → G는 각 A에 대해 사상 η_A: F(A) → G(A)로 이루어지며, 다음 도식을 만족한다.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(A') \arrow[d, "\eta_{A'}"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(A') \end{tikzcd}$$

예시.

1. S와 T가 G-set이라고 하자. S, T를 함자 **G** → **Set**으로 보았을 때, 자연적 변환 α: **S** → **T**를 다음을 만족하는 사상 α_o: S → T로 정의할 수 있다: α(g · x) = g · α(x)
2. 행렬함자 M_n: **CRing** → **Mon**과 덧셈-망각함자 U: **CRing** → **Mon**에 대해, det: M_n → U는 자연적 변환이다.

범주	**대상**	**사상**	**동형 관계**
CAT	카테고리 $\mathcal{A}$	함자 F: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	동형 $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$
$[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$	함자 F: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	자연적 변환 η: F → G	자연적 동형 F ≅ G

정리. η: F → G가 자연적 동형사상일 필요충분조건은, 각 A에 대해 η_A: F(A) → G(A)가 동형사상인 것이다.

예시.

체 k를 스칼라로 가지는 유한 차원 벡터 공간들의 범주 FDVect와, FDVect에서 FDVect로 가는 항등함자 1 및 이중쌍대함자 ( )**를 생각하자.

α: 1 → ( )**를 다음과 같이 정의한다: α_V: V → V**, v ↦ v**. 여기서 v**: V* → k는, v* ∈ V* (즉, v* : V → k)를 v*(v) ∈ k에 대응시킨다. 이 함자의 정의는 표준적canonical이며, α는 자연적 변환이다.

항등

정의. 함자 F: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, G: $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$에 대해 자연적 동형사상 η: GF → $1_{\mathcal{A}}$, ε: $1_{\mathcal{B}}$ → FG가 존재할 때, $\mathcal{A}$와 $\mathcal{B}$는 **항등**이라고 하며, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$라고 표기한다.

정리. $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$가 항등함자일 필요충분조건은 다음이 성립하는 것이다.

1. F가 충만하다.
2. F가 충족하다.
3. F가 실질적으로 전사이다.

예시. 모든 유한집합들로 이루어진 범주 **FinSet**과, 모든 자연수로만 이루어진 범주 **NatSet**을 생각하자.[1] **NatSet**은 **FinSet**의 부분범주이지만, **정리**에 의해 둘은 항등이다.

고차 범주

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{A}' \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & \mathscr{A}'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F' \circ F"] \arrow[r, bend right, "G' \circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathscr{A}'' \end{tikzcd}$$

왼쪽은 다음과 같이 오른쪽(α' * α)으로 바뀔 수 있다.

$$\begin{tikzcd} F'(F(A)) \arrow[r, "F'(\alpha_A)"] \arrow[d, "\alpha'_{F(A)}"'] & F'(G(A)) \arrow[d, "\alpha'_{G(A)}"] \\ G'(F(A)) \arrow[r, "G'(\alpha_A)"'] & G'(G(A)). \end{tikzcd}$$

위와 같이 **가로 합성** *를 정의했을 때 다음 도식에서 다음 항등식이 만족된다.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathscr{A} \arrow[r, bend left=70, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=70, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{A}' \arrow[r, bend left=70, "F'"] \arrow[r, "G'" description] \arrow[r, bend right=70, "H'"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha'"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta'"] & \mathscr{A}'' \end{tikzcd}$$

$$(\beta' * \beta)(\alpha' * \alpha) = (\beta'\alpha') * (\beta\alpha)$$

따라서 $[\mathcal{A}', \mathcal{A}''] \times [\mathcal{A}, \mathcal{A}']$에서 $[\mathcal{A}, \mathcal{A}'']$로 가는 함자를 구성할 수 있다. 위 도식에는 가로선(함자)뿐 아니라 세로선(자연적 변환)도 있으므로 2-범주라고 부른다. 위 논의를 일반화하여 3-범주, 4-범주, 그리고 ∞-범주를 정의할 수 있다.

---

[1] 여기서 n은 집합으로 생각한다. 즉, $0 = \varnothing$, $n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.

2. 어드조인트

어드조인트

정의. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$가 카테고리이고, F: $\mathcal{A}$ → $\mathcal{B}$, G: $\mathcal{B}$ → $\mathcal{A}$가 함자라고 하자. F가 G의 **좌 어드조인트**$_{\textbf{left adjoint}}$라는 것은 임의의 A ∈ $\mathcal{A}$, B ∈ $\mathcal{B}$에 대해 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}$(F(A), B)와 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$(A, G(B))가 자연스럽게 일대일 대응될 수 있다는 것이다. 즉,

$$\begin{array}{ccc} (F(A) \xrightarrow{g} B) & \mapsto & (A \xrightarrow{\bar{g}} G(B)) \\ (A \xrightarrow{f} G(B)) & \mapsto & (F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B) \end{array}$$

여기서 “자연스럽게”는 다음 도식이 가환적이라는 요구이다.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(A', G(B)) \arrow[r, "\Psi_{A',B}"] \arrow[d, "(-)\circ p"'] & \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(F(A'), B) \arrow[d, "(-)\circ F(p)"] \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \arrow[r, "\Psi_{A,B}"] \arrow[d, "G(q)\circ(-)"'] & \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \arrow[d, "q\circ(-)"] \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B')) \arrow[r, "\Psi_{A,B'}"] & \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B') \end{tikzcd}$$

즉, 합성 후 전치의 결과와 전치 후 합성의 결과는 같아야 한다. 이 때, F ⊣ G와 같이 표기한다.

예시.

1. 일반적으로 자유함자는 망각함자의 좌 어드조인트이다.
2. R: **Mon** → **Grp**를 R(M) = { m ∈ M : m은 곱의 역원을 가짐 }으로 정의하자. 망각함자 U: **Grp** → **Mon**과 자유함자 F: **Mon** → **Grp**에 대해, F ⊣ U ⊣ R이다.

   Remark. 좌 어드조인트는 구축(다운캐스팅)을, 우 어드조인트는 파괴(업캐스팅)

3. **Z** = (ℤ, ≤), **R** = (ℝ, ≤)일 때 포함함자 ι : **Z** → **R**와 올림/내림함자 ⌈·⌉, ⌊·⌋: **R** → **Z**가 존재한다. 또한, ⌈·⌉ ⊣ ι ⊣ ⌊·⌋이다.

   Remark. 좌 어드조인트는 왼쪽에서 오른쪽으로의 근사, 우 어드조인트는 오른쪽에서 왼쪽으로의 근사

4. (-) × B: **Set** → **Set**은 $(-)^B$: **Set** → **Set**의 좌 어드조인트이다. (람다 함수)

정의. 범주 $\mathcal{A}$에 대해, $I \in \mathcal{A}$가 **초기대상**$_{\textbf{initial object}}$이라는 것은 임의의 $A \in \mathcal{A}$에 대해 사상 $I \to A$가 유일하게 존재한다는 것이다. 또한 $T \in \mathcal{A}$가 **종단대상**$_{\textbf{terminal object}}$이라는 것은 사상 $A \to I$가 유일하게 존재한다는 것이다.

정리. 홑원소 범주 $\mathcal{C}$에 대해 $\mathcal{A}$의 특정 원소를 골라내는 선택범주 $S: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$와, $\mathcal{A}$의 모든 원소를 홑원소로 보내는 표준범주 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$가 존재한다.

- $S \dashv F$라면, S의 치역은 $\mathcal{A}$의 초기대상이다.
- $F \dashv S$라면, S의 치역은 $\mathcal{A}$의 종단대상이다.

유닛

정의. $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$가 $G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$의 좌 어드조인트라고 하자. $\eta_A : A \to GF(A)$를 $\mathrm{conj}(1_{F(A)})$로, $\varepsilon_B := FG(B) \to B$를 $\mathrm{conj}(1_{G(B)})$로 정의할 때,

$$\eta: 1_{\mathcal{A}} \to GF, \quad \varepsilon: FG \to 1_{\mathcal{B}}$$

는 자연적 변환이며, 각각 유닛$_{\text{unit}}$과 코유닛$_{\text{counit}}$이라고 부른다.

Remark. 유닛과 코유닛이 자연적 변환임은 다음 가환 도식으로부터 보여진다. $(f : A \to A')$

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{B}}(F(A'), F(A')) \arrow[r, "\overline{(-)}"] \arrow[d, "(-)\circ F(f)"'] & \hom_{\mathcal{A}}(A', GF(A')) \arrow[d, "(-)\circ f"] \\
\hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(A')) \arrow[r, "\overline{(-)}"] & \hom_{\mathcal{A}}(A, GF(A')) \\
\hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(A)) \arrow[r, "\overline{(-)}"] \arrow[u, "F(f)\circ(-)"] & \hom_{\mathcal{A}}(A, GF(A)) \arrow[u, "GF(f)\circ(-)"']
\end{tikzcd}$$

3. 범주론적 집합론

어드조인트

정의.

4. 요네다 보조정리-

어드조인트

정의.