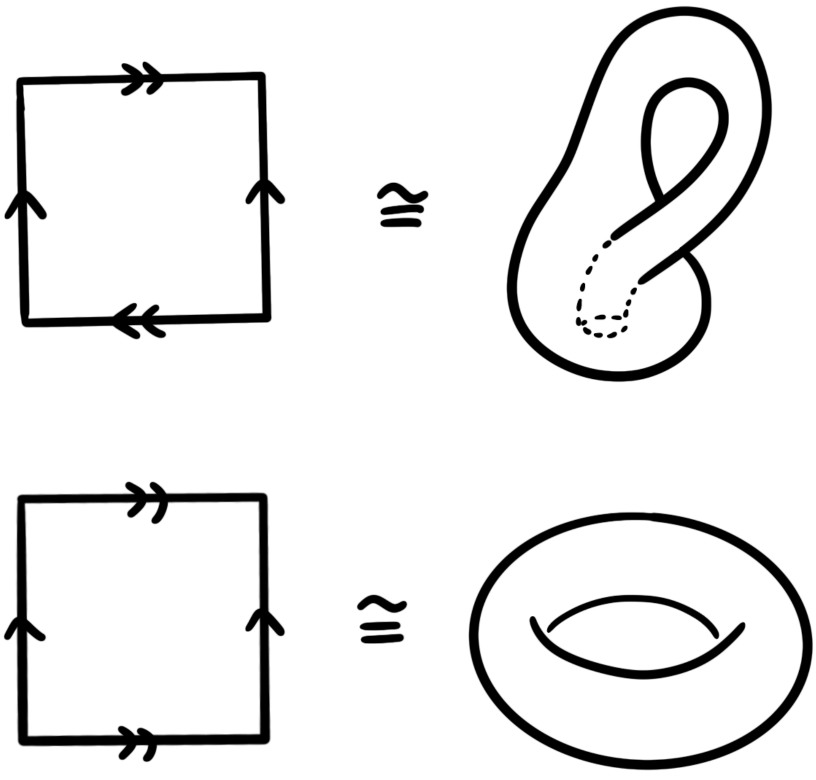
대수위상 복습 노트

디멘(최정담)



1. 호모토피와 기본군

기본 개념

정의. 연속함수 $f, f': X \to Y$에 대해 연속함수 $F: X \times I \to Y$가 존재하여 $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = f'(x)$일 때 f, f'은 호모토픽하다고 한다.

정리. 호모토피 관계는 동치 관계이다.

따름정의. 위상공간 X에서 시작점과 끝점이 x_0인 루프를 호모토피 관계에 따라 분류한 군을 기본군 $\pi_0(X, x_0)$이라 한다.

정의. 연속함수 $h: (X, x_0) \to Y(y, y_0)$ 에 대해 $h^*([f]) = [hf]$를 h에 의해 유도된 준동형 사상이라고 한다.

정리. $(hk)^* = (h^* k^*)$

덮개 공간

정의. $p: E \to B$가 전사일 때, 열린집합 $U \subset B$에 대해 $p^{-1}(U)$가 U와 동형인 열린집합들의 서로소 합이라면 U가 p에 의해 덮어졌다고 한다. B의 모든 점이 p에 의해 덮인 근방을 가지면 E를 B의 덮개 공간이라고 한다.

정리.

1. p, p'가 덮개 사상이라면 $p \times p'$도 덮개 사상이다.
2. p가 덮개 사상이라면 p의 restriction도 덮개 사상이다.

리프팅

정의. $f: X \to B$, $p: E \to B$에 대해 $pf' = f$를 만족하는 f'을 f의 리프팅이라고 한다.

리프팅 정리. $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$가 덮개 사상일 때,

1. b_0에서 시작하는 경로 $f: I \to B$는 e_0에서 시작하는 리프팅 경로 $f': I \to E$를 유일하게 가진다.
2. $F(0, 0) = b_0$인 경로 호모토피 $F: I \times I \to B$는 $F'(0, 0) = e_0$인 리프팅 호모토피를 유일하게 가진다.

   증명. 르벡 수 보조정리

따름정의. <u>리프팅 대응</u> $\phi: \pi(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ (Remark: 일반적으로 ϕ는 준동형 사상이 아니다)

정리.

1. E가 경로 연결 공간이면 ϕ는 전사이다.
2. E가 단순 연결 공간이면 ϕ는 전단사이다.

원의 단순군. $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$

<u>증명</u>

덮개 사상 $p: \mathbb{R} \to S^1$ given by $x \mapsto e^{2\pi i x}$를 고려하자. $b_0 = (1, 0) \in S^1$에 대해 $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$이고, $\mathbb{R}$은 단순 연결 공간이므로 리프팅 대응 ϕ는 전단사이다. ϕ가 준동형 사상임을 보이면 (easy) $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$.임이 증명됨.

리프팅 정리. $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$가 덮개 사상이라고 하자.

1. p^*은 단사이다.
2. $H = p^*(\pi(E, e_0))$라고 하자. $\pi(B)$의 우 잉여류를 $p^{-1}(b_0)$으로 보내는 사상 $\psi: \pi_1(B, b_0)/H \to p^{-1}(b_0)$은 단사이다. E가 경로 연결 공간이면 ψ는 전단사이다.
3. f가 b_0가 기준점인 B의 루프일 때, $[f] \in H$일 필요충분조건은 f의 리프팅이 e_0가 기준점인 루프일 것이다.

2. 리트랙트와 널호모토피

리트랙트

정의. $A \subset X$에 대해 어떤 사상 $r: X \to A$가 존재하여 $r|_A = 1$일 때 A를 X의 리트랙트라고 한다.

리트랙트 정리. A가 X의 리트랙트라면 A의 기본군은 X의 기본군의 부분군이다.

따름정리. S^1은 B^2의 리트랙트가 아니다.

널호모토피 정리. 루프 $h: S^1 \to X$에 대해 다음이 성립한다.

1. h는 널호모토피이다.
2. h는 $h': B^2 \to X$로 확장될 수 있다.
3. h^*은 자명한 준동형 사상이다.

따름정리.

1. 포함사상 $j: S^1 \to \mathbb{R}^2 - 0$은 널호모토픽하지 않다.
2. 항등사상 $i: S^1 \to S^1$은 널호모토픽하지 않다.

브라우어르 고정점 정리

브라우어르 고정점 정리. $f: B^2 \to B^2$가 연속함수이면 f는 고정점을 가진다.

증명

보조정리. B^2 위의 벡터장 v가 영벡터를 가지지 않으면, 어떤 $x_0, x_1 \in S^1$에 대해 $v(x_0) = kx_0$, $v(x_1) = -sx_0$ $(k, s > 0)$이다.

증명. $v: B^2 \to R^2 - 0$이므로, 널호모토피 정리에 의해 $v|_{S^1}{}^*$은 자명하며, $v(S^1)$은 널호모토피임. 만약 모든 $x \in S^1$에 대해 $v(x) \neq s(x)$ for some $s > 0$ 라면 $F(x, t) = tx + (1 - t)v(x)$은 호모토피이므로 S^1 또한 널호모토피가 되어 모순. x_0의 경우에는 $-v$를 고려.

본 정리의 증명. f가 고정점을 가지지 않는다면 $g(x) := f(x) - x: B^2 \to \mathbb{R}^2 - 0$이므로 어떤 $x_0 \in S^1$에 대해 $g(x_0) = kx_0$ $(k > 0)$임. 즉, $f(x_0) = (1 + k)x_0 \notin B^2$가 되어 모순.

대수학의 기본 정리

대수학의 기본 정리. 복소계수 방정식은 복소수 근을 가진다.

증명

1. 충분히 큰 자연수 N에 대해 x = Nx를 치환함으로써 $p(x) = x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, $|a_{n-1}| + \dots + |a_0| < 1$인 경우로 환원할 수 있다. 만약 p가 근이 없다면 $k := p|_{B^2} : B^2 \to \mathbb{R}^2 - 0$ 이므로 $h := k|_{S^1}$은 널호모토피이다.

2. 이제 h와 $g(x) = x^n : S^1 \to \mathbb{R}^2 - 0$이 호모토피임을 보인다. $F(x, t) : S^1 \times I \to \mathbb{R}^2$ defined by $(x, t) \mapsto x^n + t(a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$는 가정($|a_{n-1}| + \dots + |a_0| < 1$)에 의해 0을 치역으로 가지지 않으므로 h와 g의 호모토피이다.

3. $g^* : \pi(S^1) \to \pi(\mathbb{R}^2 - 0)$는 단사이므로 널호모토피가 아니다 → 모순!

보르수크-울람 정리

보조정리. $h: S^1 \to S^1$가 연속이고 대척점 보존이면 h는 널호모토픽하지 않다.

증명. 일반성을 잃지 않고 $b_0 = (1, 0)$에 대해 $h(b_0) = b_0$를 가정해도 된다.

1. $q: S^1 \to S^1$ defined by $z \mapsto z^2$는 콤팩트 공간에서 하우스도르프 공간으로 가는 연속함수이므로 닫힌 사상인 동시에 전사이므로 q는 몫사상이다. h는 대척점 보존이므로 qh는 $q^{-1}(\{y\})$에 대해 항등이며, 목사상 유도 정리에 따라 qh = kq인 연속사상 $k: S^1 \to S^1$가 존재한다.

2. $q: S^1 \to S^1$은 S^1의 각 사분호를 균등하게 덮으므로 q는 덮개 사상이다. 이로부터 k가 널호모토픽하지 않음을 보인다.

    1. b_1을 b_0의 대척점이라고 하자. b_0에서 b_1으로 가는 표준 경로 $f': I \to S^1$은 자명하지 않은 b_0-루프 f의 리프팅이다.

    2. $k^*[f] = k^*[qf'] = [kqf'] = [qhf']$. hf'은 b_0에서 b_1으로 가는 경로이므로 qhf'은 자명하지 않다.

3. $q^*h^* = k^*q^*$. q^*은 자명하지 않고 ($[f] \mapsto 2[f]$) k^*은 2에 의해 자명하지 않으므로 좌변 또한 자명하지 않다 → h^*은 자명하지 않다.

따름정리. 연속이면서 대척점을 보존하는 사상 $g: S^2 \to S^1$은 존재하지 않는다.

증명. 그러한 g가 존재한다고 하자. S^2의 적도를 S^1으로 보면 $g|_{S^1}$은 연속이고 대척점 보존이므로 널호모토픽하지 않다. 하지만 π: (북반구) → B^2 사영에 의해 $g|_{S^1}$은 $g|_{(\text{북반구}) = B^2}$로 확장 가능하므로 널호모토피 정리에 의해 널호모토픽하여 모순이다.

보르수크-울람 정리. $g: S^2 \to \mathbb{R}^2$가 연속이라면 $g(x) = g(-x)$인 $x \in S^2$가 존재한다.

증명. 그러한 x가 없다고 하자. 그러면 $f(x) = (g(x) - g(-x))/||g(x) - g(-x)||$는 $S^2 \to S^1$이며 연속이고 대척점 보존이 되어 따름정리와 모순이다.

3. 변형 리트랙트와 호모토피 형

변형 리트랙트

호모토픽한 준동형 사상 정리. $h, k: (X, x_0) \to (Y, y_0)$가 호모토픽하고 해당 호모토피가 전 구간에서 $x_0 \mapsto y_0$라면, $h^* = k^*$이다.

정의. $A \subset X$에 대해 A가 X의 리트랙트이고, id_X와 리트랙트 사상이 호모토픽하면 A는 X의 변형 리트랙트이다.

정리. A가 X의 변형 리트랙트라면 $x_0 \in A$에 대해 $\pi(A, x_0) = \pi(X, x_0)$이다.

증명. 포함 사상 $j: A \to X$와 리트랙트 $r: X \to A$에 대해 $jr: X \to X$가 id_X와 호모토픽하므로 j^*은 단사이다. A가 X의 리트랙트이므로 j^*은 전사이다. 따라서 j^*은 동형 사상이다.

호모토피 형

정의. $f, g: X \to Y$에 대해 $gf: X \to X$가 id_X와 호모토픽하고 $fg: Y \to Y$가 id_Y와 호모토픽할 때, f와 g를 호모토피 동형 사상이라고 부르고 X, Y는 같은 호모토피 형이라고 한다.

일반화된 호모토픽한 준동형 사상 정리. $h: (X, x_0) \to (Y, y_0)$와 $k: (X, x_0) \to (Y, y_1)$가 호모토픽하면 어떤 Y의 경로 $a: y_0 \rightsquigarrow y_1$에 대해 $k^* = \hat{a} \cdot h^*$이다.

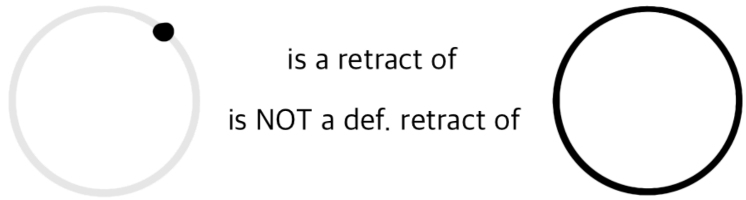
증명: h와 k 간의 호모토피가 H일 때 $a: I \to Y$는 $a(t) = H(x_0, t)$이다.

따름정리.

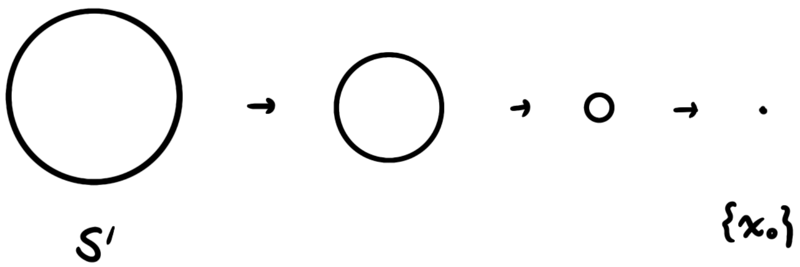
1. $h, k: X \to Y$가 호모토픽하면, h^*는 (자명/단사/전사)이다 iff k^*는 (자명/단사/전사)이다.
2. **(일반화된 널호모토피 정리)** $h: X \to Y$가 널호모토피라면 h^*는 자명하다.

호모토피 동형 사상 정리. $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$가 호모토피 동형사상이라면 f^*는 $\pi(X, x_0)$와 $\pi(Y, y_0)$의 동형사상이다.

Remark. $r: A \to X$가 연속이라는 것은 공간 상의 연속을 의미한다. 즉, x_0가 A에서 연속적으로 이동할 때 $r(x_0)$ 또한 연속적으로 이동한다는 뜻이다. 한편 r이 id_X와 호모토픽하다는 것은 시간 상의 연속을 의미한다. 즉, $x \in A$에 대해 $\{ x \}$가 다함께 $\{ r(x) \}$로 옮겨지는 연속적인 애니메이션이 있음을 의미한다. 다음 그림 참조.



Remark. 호모토피를 따질 때에는 배경이 되는 공간을 염두에 두자. 일례로 다음 그림은 S^1을 $\{x_0\}$으로 수축하는 변형 리트랙트처럼 보일 수 있지만, 배경이 S^1이 아닌 $\mathbb{R}^2$이기 때문에 올바른 변형 리트랙트가 아니다.



4. 주요 공간의 기본군

S^n의 기본군

특수화된 자이페르트-판 캄펀 정리. 두 열린집합 U, V에 대해 $X = U \cup V$이고 $x_0 \in U \cap V$이며 $U \cap V$가 경로 연결 공간일 때, 포함 사상으로 유도되는 준동형 사상 $i^*: \pi(U, x_0) \to \pi(X, x_0)$와 $j^*: \pi(V, x_0) \to \pi(X, x_0)$의 치역은 $\pi(X, x_0)$을 생성한다.

즉, 임의의 $[f] \in \pi(X, x_0)$에 대하여 어떤 $[g_1], \ldots, [g_n]$이 존재하여 각 g_i는 U 또는 V의 x_0-루프이고, $[f] = [g_1 * \ldots * g_n]$이다.

증명.

1. $[f] \in \pi(X, x_0)$가 주어졌을 때, 르벡 수 정리로부터 각 i에 대해 $f([b_i, b_{i+1}])$가 U 또는 V에 속하도록 하는 [0, 1]의 세분 $\{b_i\}$를 찾는다.
2. 각 i에 대해 $f(b_i)$는 ㄱ) U에만 속하거나 ㄴ) V에만 속하거나 ㄷ) $U \cap V$에 속한다. ㄱ과 ㄴ의 경우, $f([b_{i-1}, b_i])$와 $f([b_i, b_{i+1}])$는 둘 다 U에 속하거나 둘 다 V에 속하므로 b_i를 제거해도 (1)을 만족하는 세분을 얻는다. 이같은 제거를 반복하면 모든 i에 대해 $f(b_i)$가 $U \cap V$에 속하는 한편 (1)을 만족하는 [0, 1]의 세분을 얻는다.
3. 각 i에 대해 α_i를 x_0와 b_i를 잇는 임의의 경로로 정의한다. 그러면 $g_i = \alpha_i * f([b_i, b_{i+1}]) * \alpha_{i+1}$이 정리의 조건을 만족한다.

S^n의 기본군. $n \geq 2$에 대해 S^n은 단순 연결 공간이다.

증명. p, q를 S^n의 북극점과 남극점이라고 하자. 평사 투영streographic projection에 의해 $S^n - p$와 $S^n - q$는 $\mathbb{R}^n$과 동형이므로 단순 연결 공간이다. 둘의 교집합인 $S^n - p - q$는 원기둥과 동형이므로 경로 연결 공간이다. 따라서 자이페르트-판 캄펀 정리에 의해 S^n은 단순 연결 공간이다.

Remark. 유계는 위상 성질이 아니다.

토러스의 기본군

곱공간의 기본군 정리. $\pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$이다. 구체적으로, p와 q가 각각 $X \times Y$를 X, Y로 보내는 사영일 때, $p \times q$는 $\pi(X \times Y)$와 $\pi(X) \times \pi(Y)$의 동형 사상이다.

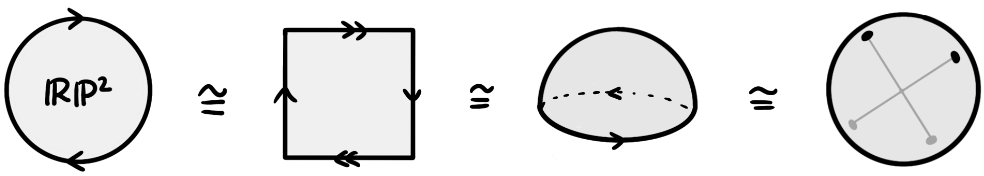
T의 기본군. $\pi(T) \cong \mathbb{Z}^2$

T#T의 기본군. T#T의 기본군은 비아벨군이다.

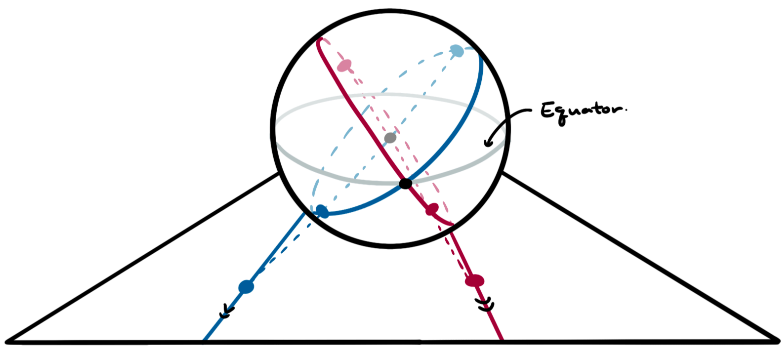
증명. 먼저 8자 공간이 비아벨군임을 보인다. 오른쪽 공간은 8자 공간의 덮개 공간이다. 8자 공간의 왼쪽과 오른쪽을 한 번씩 감는 루프와 오른쪽과 왼쪽을 한 번씩 감는 루프는 각각 (0, 1)과 (1, 0)로 리프팅되므로 기본군은 비아벨군이다. 8자 공간은 T#T의 리트랙트이므로 T#T의 기본군 또한 비아벨군이다.

사영평면의 기본군

정의. S^2의 대척점을 동등시하는 몫공간을 사영평면 RP^2라고 한다.



Remark. 사영평면은 유클리드 평면의 "버그"를 수정한 공간으로 볼 수 있다. 유클리드 평면에서 "서로 다른 두 직선은 하나의 교점을 가진다"는 평행선 때문에 일반적으로 성립하지 않는다. 하지만 직선의 기울기를 나타내는 "기울기점"을 평면에 추가하면, 평행한 두 직선은 해당 "기울기점"에서 만나게 된다. 이 "기울기점"은 사영된 구의 적도에 위치한다. 따라서 사영평면에서는 언제나 두 직선이 하나의 점을 결정하며, 두 개의 점은 하나의 직선을 결정한다.



정리. 사영평면은 콤팩트한 곡면(즉, 국소적으로 $\mathbb{R}^2$인 하우스도르프 2차 가산 공간)이며, 몫사상 $q: S^2 \to RP^2$는 덮개 사상이다.

따름정리: RP^2의 기본군. $\pi(RP^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

증명. 몫사상 $q: S^2 \to RP^2$가 덮개 사상이고, $y \in RP^2$에 대해 $|q^{-1}(y)| = 2$이며, S^2가 단순 연결 공간이다.

정리. S^2, T, T#T, RP^2는 위상적으로 다른 공간이다.