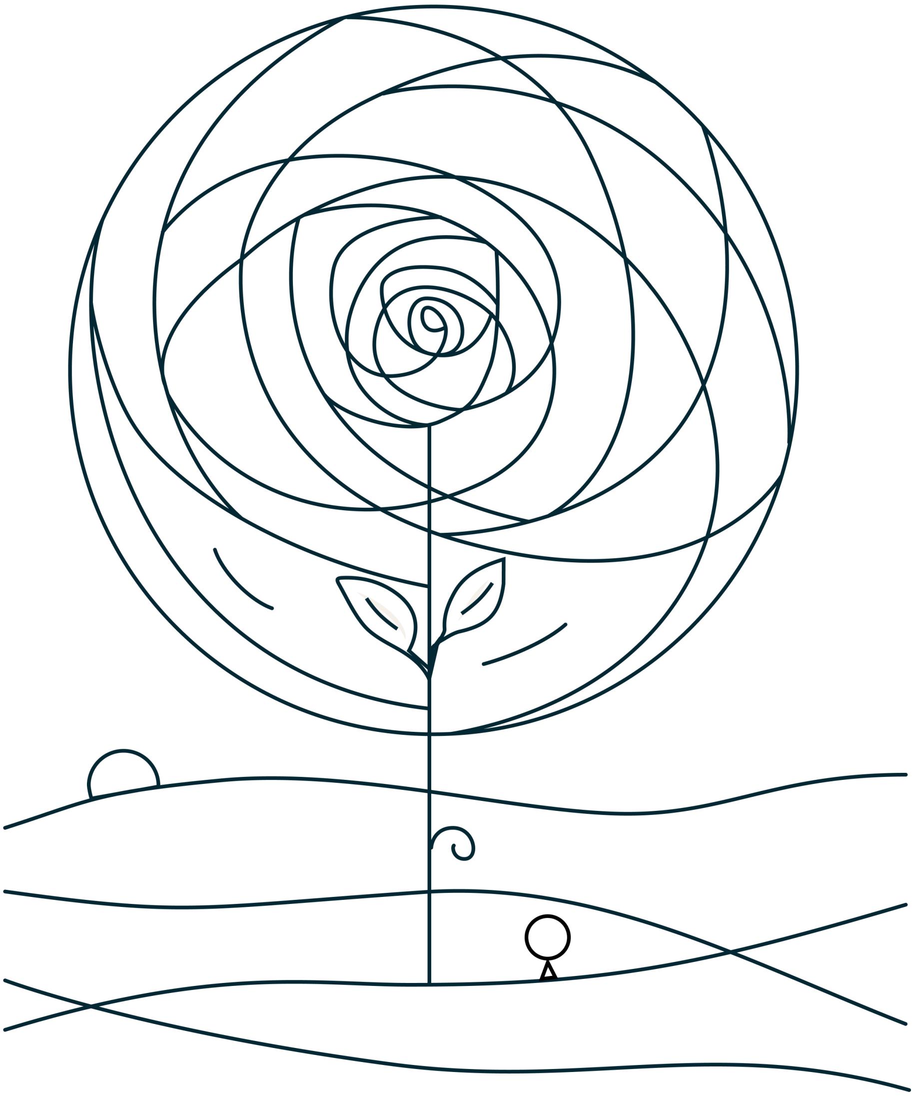
논리학 및 언어철학 스터디

디멘(최정담)



Disclaimer

1. 저는 논리학 · 철학 전문가가 아니며 해당 자료에는 오류가 있을 수도 있습니다. 오류를 발견하신다면 dimenerno@gmail.com으로 연락 부탁드립니다.

2. 해당 자료는 체계적인 교육의 목적이 아닌 다양한 배경의 사람들에게 논리학과 언어철학에 관한 흥미를 촉진하기 위해 만들어진 자료입니다. 이에 따라 엄밀한 정의와 증명은 다수 생략되어 있습니다. 일부 독자에게는 체계적인 논리학 · 언어철학 전공서로 본 자료의 내용을 보충하는 것이 권장됩니다.

3. 업데이트된 자료는 https://dimen.notion.site/57b61059e29446b4b4292a7900193160?pvs=4에서 확인할 수 있습니다.

Part 1 — 논리학

1. 언어와 논리

쟁점

1. 논리학의 쟁점들

   1. 수학적 대상은 어떻게 정의되고 기술되어야 하는가?
   2. “참”과 “증명”이란 무엇이며 어떻게 차이나는가?
   3. 수학 체계의 위력과 건전성에는 어떠한 트레이드오프 관계가 있는가? 등등…

2. 언어철학의 쟁점들

   1. 언어는 의미를 어떻게 획득하는가?
   2. 의미의 문제(ϕ는 P를 의미한다)와 참의 문제(ϕ는 P일 때 참이다) 중 무엇이 선행하는가?
   3. 의미는 주관적 · 심리적 대상인가, 객관적 · 외재적 대상인가? 등등…

약간의 역사

1. 아리스토텔레스의 논리학

   1. 삼단 논법
   2. 네 가지 양화사 (A, E, I, O)

2. 라이프니츠의 논리학

   1. 단자론 → 1차 논리
   2. 논리 접속사 (∧, ∨, ¬, =)
   3. *Characteristica universalis*

3. 19세기 논리학: 직관에서 형식으로

   1. 해석학의 발전
      1. 미분소 비판
      2. 병리적 함수 발견
      3. 엡실론-델타 논법 (1820s)

2. 비유클리드 기하학 (1830s)
    1. 칸트: 기하학의 기반은 직관
    2. 비유클리드 기하학의 발견 → 형식적 기하학
3. 칸토어의 소박한 집합론 (1870s)
4. 프레게의 논리학 (1879) → 1차 논리
    1. 데데킨트-페아노 공리계 (1880s)
    2. 산술의 논리적 환원

4. 20세기 논리학: 수학의 기초에 닥친 위기

1. 러셀의 역설(1901) → 유형론
2. 힐베르트 프로그램(1910s) → 공리적 집합론
3. 괴델의 불완전성 정리(1931)

5. 논리실증주의

1. 비트겐슈타인, 《논리철학논고》 (1918) → "언어적 전회"
2. 카르납, 《세계의 논리적 구조》 (1928) → 대륙철학과 영미철학의 "갈림길"
3. 에이어, 《언어, 진리, 논리》 (1935) → 분석적 방법론을 윤리학에 적용; 정서주의
4. 포퍼, 《과학적 발견의 논리》 (1959) → 분석적 방법론을 인식론에 적용; 반증주의

6. 언어철학 전통

1. 프레게, 《뜻과 지시체에 관하여》 (1892)
2. 러셀, 《지시에 관하여》 (1905)
3. 크립키, 《이름과 필연》 (1980)

2. 두 세계 — 기호와 의미

형태론과 의미론

1. 네 가지 문장

1. "정담이는 카이스트의 학생이다."
2. "정담이는 카이스트의 학생이 아니다."
3. "카이스트에게 학생은 정담이의."
4. "정담이는 카이스트 학생이거나 카이스트 학생이 아니다."

2. 형태론과 의미론

1. 형태론(syntax)
    1. 기호와 문법의 세계
    2. 적형(well-formed), 형식적 증명(formal proof)
2. 의미론(semantics)
    1. 대상과 의미의 세계
    2. 참(true)

3. 참의 종류

1. 우연적 참: 특정 세계에서 참인 문장
2. 논리적 참: 가능한 모든 세계(모델)에서 참인 문장

형태론: 이론과 증명

1. 이론과 증명

1. 이론: 문장들의 집합
    1. T = {IsPerson(Socrates), ∀x IsPerson(x) → Dies(x)}
    2. 이론의 크기는 무한할 수도 있음
2. 증명 체계: 가능한 논리적 추론의 형태

        1. 힐베르트 시스템, 자연연역법 등 다양한 체계가 존재
        2. 극단적 예시
            1. Mighty Ponens: $\varnothing \vdash p$
            2. Feeble Ponens: $p \vdash p$
        3. 실질적 예시
            1. Modus Ponens: $p, p \to q \vdash q$
            2. ∀-Elimination: $\forall x\, P(x) \vdash P(c)$

2. 증명 가능성

1. 증명: 이론과 공리로부터 명제를 추론하는 것
    1. 증명 체계 S = {Modus Ponens, ∀-Elimination}를 사용해서 T로부터 Dies(Socrates)를 증명하기
        1. ∀x IsPerson(x) → Dies(x) (∵ 이론에서 주어짐)
        2. IsPerson(Socrates) → Dies(Socrates) (∵ 1에서 ∀-Elimination)
        3. IsPerson(Socrates) (∵ 이론에서 주어짐)
        4. Dies(Socrates) (∵ 2와 3에서 Modus Ponens)
2. 증명 가능: 증명 체계 S 하에서 어떤 명제 ϕ가 이론 T에서 증명 가능할 때 $\mathbf{T} \vdash_{\mathbf{S}} \boldsymbol{\phi}$

의미론: 모델과 참

1. 모델

1. 일종의 수학적 세계, 진리집합을 명시
2. 모델 M이 ϕ에서 참일 때 $\mathbf{M} \vDash \boldsymbol{\phi}$
3. 예시
    1. M = { IsPerson = {Socrates, Plato}, Dies = {Socrates, Plato} }
       N = { IsPerson = {Socrates, Plato}, Dies = {Plato} }
    2. M과 N에서 "IsPerson(Socrates)"는 참
    3. M에서 "∀x IsPerson(x) → Dies(x)"는 참: M ⊨ ∀x IsPerson(x) → Dies(x)
    4. N에서 "∀x IsPerson(x) → Dies(x)"는 거짓: N ⊭ ∀x IsPerson(x) → Dies(x)

두 세계를 넘나들기

1. **모델과 이론의 관계**
    1. M에서 T의 모든 문장이 참일 때 M은 T의 모델 (**M** ⊨ **T**)
    2. 어떤 이론의 모델은 일반적으로 유일하지 않음
        1. L = { IsPerson = {Socrates, Plato, Aristotle}, Dies = {Socrates, Plato, Aristotle} }
        2. 이론 T를 만족하는 모델이 유일할 때 T는 정언적(categorical)
    3. T의 모든 모델에서 φ가 참일 때 **T** ⊨ **φ**
        1. T ⊨ ∀x IsPerson(x) → Dies(x)
2. **참과 증명가능성의 관계**
    1. 모든 문장 φ에 대하여 $T \vdash_S \phi$ 라면 T ⊨ φ 일 때, S는 건전한(sound) 증명 체계
    2. 모든 문장 φ에 대하여 T ⊨ φ 라면 $T \vdash_S \phi$ 일 때, S는 의미론적으로 완전(semantically complete)
3. **완전성과 모순**
    1. 모든 문장 φ에 대하여 $T \vdash_S \phi$ 또는 $T \vdash_S \neg\phi$ 일 때 S는 형태론적으로 완전(syntactically complete)
    2. T ⊬ ⊥ 일 때 T는 무모순적 이론(consistent theory)
        1. 폭발 원리: 모순으로부터 아무 명제를 증명할 수 있음, i.e. {⊥} ⊢ φ

참과 증명 가능성의 괴리

1. **의미론적 완전성과 형태론적 완전성**
    1. T ⊢ ¬φ 와 T ⊬ φ는 동치가 아님!
        1. T ⊢ ¬φ : ¬φ의 증명이 존재한다 (긍정적)
        2. T ⊬ φ : φ의 증명이 존재하지 않는다 (부정적)
        3. 예) T = {φ ∨ ¬φ}일 때, T ⊬ φ이지만 그렇다고 T ⊢ ¬φ인 것은 아님.
    2. 의미론적으로 완전하다면 형태론적으로 완전한가? → NO
        1. 잘못된 추론
            1. T가 의미론적으로 완전하다고 하자.
            2. T ⊨ φ 또는 T ⊭ φ 이다.
                1. T ⊨ φ 라면 T ⊢ φ 이다. (의미론적 완전성의 정의)
                2. T ⊭ φ 라면 T ⊨ ¬φ 이고, 따라서 T ⊢ ¬φ 이다.
            3. 따라서 T는 형태론적으로 완전하다.

2. 잘못된 이유는 2-2번!

    1. **M** $\nvDash \phi$ 라면 **M** $\vDash \neg\phi$ 이지만, **T** $\nvDash \phi$ 라면 **T** $\vDash \neg\phi$ 인 것은 아니다!

    2. 예) $T = \{ \forall x\, P(x, x) \}$, $\phi = \exists y\, \neg P(a, y)$
       $M = \{ P: \{ (a, a), (b, b) \} \}$, $N = \{ P : \{ (a, a) \} \}$

        1. $M \vDash T$, $N \vDash T$

        2. $M \vDash \phi$, $M \nvDash \neg\phi$ (둘은 동치)

        3. $N \vDash \neg\phi$, $N \nvDash \phi$ (둘은 동치)

        4. 그러나 $T \nvDash \phi$ ($N \nvDash \phi$ 이므로) 인 동시에 $T \nvDash \neg\phi$ ($M \nvDash \neg\phi$)

3. 형태론적으로 완전하다면 의미론적으로 완전한가? → 증명 체계가 건전하다면 YES

    1. T가 형태론적으로 완전하다고 하고, $T \vDash \phi$ 를 가정.

    2. $T \vDash \phi$ 이므로 $T \nvDash \neg\phi$ (Why?)

    3. 귀류법: 만약 $T \nvdash \phi$ 라면 형태론적 완전성의 정의에 의해 $T \vdash \neg\phi$

        1. 그러나 T가 건전하다는 가정에 의해 $T \vDash \neg\phi$가 되어 모순.

2. 결론: 참과 증명 가능성의 괴리

1. $M \vDash T$이고 $M \vDash \phi$이지만 $T \nvdash \phi$일 수 있다!

    1. 이같은 경우가 발생하는 이유는 T의 모델이 여럿일 수 있기 때문 (2.2.2의 반례 참조)

        1. 역으로 T의 모델이 유일하고 의미론적으로 완전할 경우 참과 증명 가능성의 괴리는 발생하지 않음

2. 그러나 $T \vdash \phi$이면서 $T \nvDash \phi$일 수는 없다.

    1. 왜냐하면 1차 논리의 증명 체계는 건전하기 때문 (Soundness Theorem)

3. 괴델의 정리

1. 괴델의 완전성 정리: 1차 논리는 의미론적으로 완전하다.

2. 괴델의 불완전성 정리: 페아노 공리계는 형태론적으로 완전하지 않다.

참고: 괴델의 완전성 정리와 불완전성 정리는 어떻게 공존 가능할까?

3. 1차 논리의 주요 정리들

건전성 정리

1. 내용

1. 1차 논리는 건전한 증명 체계를 가진다.
2. 즉, 1차 논리 이론 T에 대하여 $T \vdash_S \phi$라면 $T \vDash \phi$인 증명 체계 S가 존재한다.
3. 구체적으로, 힐베르트 시스템과 자연연역법은 건전한 증명 체계.

2. 증명의 개요

1. 증명의 길이를 n으로 두고 귀납법을 적용
    1. $S = \{MP\}$, $T = \{P, P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S\}$일 때 $T \vdash_S S$의…
        1. 증명 길이는 3
        2. 증명 색인은 $\{Q, R, S\}$
2. 길이 n 이하의 증명에 대해 $T \vdash_S \phi$라면 $T \vDash \phi$가 성립한다고 가정하자.
3. $T \vdash_S \phi$가 길이 $n + 1$의 증명이라고 하고, 색인이 $\{\phi_1, \phi_1, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1} = \phi\}$라고 하자.
    i. 귀납 가정에 의해 $T \vDash \phi_1$, $T \vDash \phi_2$, …, $T \vDash \phi_n$이다.
    ii. S의 임의의 추론 규칙이 $A_1, A_2, \ldots, A_m$으로부터 B를 추론할 때, $T \vDash A_1$, $T \vDash A_2$, …, $T \vDash A_m$이라면 $T \vDash B$임을 보인다.
    iii. i와 ii에 의해 $T \vDash \phi_{n+1}$이다.
4. 2와 3에 의해 일반적으로 $T \vdash_S \phi$라면 $T \vDash \phi$이다.
    1. 증명의 길이는 유한하다는 것이 논증의 핵심

괴델의 완전성 정리

1. 내용

1. 1차 논리는 의미론적으로 완전한 증명 체계를 가진다.
2. 즉, 1차 논리 이론 T에 대하여 $T \vDash \phi$라면 $T \vdash_S \phi$인 증명 체계 S가 존재한다.

3. 구체적으로, 힐베르트 시스템과 자연연역법은 완전한 증명 체계.

4. 만족가능성 정리와 명제 논리의 완전성 정리로부터 도출

2. 만족가능성 정리

1. T가 모델을 가질 때, T는 만족가능(satisfiable)
2. $T \vdash \phi$라면 $T \nvdash \neg\phi$일 때 T는 무모순적(consistent)
3. 만족가능성 정리
    1. “T가 만족가능하다면 T는 무모순적이다”는 건전성 정리와 동치이다.
    2. “T가 무모순적이라면 T는 만족가능하다”는 완전성 정리와 동치이다.
4. 증명
    1. Left as an exercise to the readers. (^—^)
    2. 힌트: T가 무모순적이고 $T \nvdash \phi$라면 $T \cup \{\neg\phi\}$도 무모순적 (Why?)

3. 명제 논리의 완전성 정리

1. 내용: 명제 논리는 의미론적으로 완전한 증명 체계를 가진다.
2. 증명의 개요
    1. $\{P_1, \ldots, P_n\} \vDash Q$와 $\varnothing \vDash P_1 \rightarrow \ldots \rightarrow P_n \rightarrow Q$는 동치이므로, 모든 항진명제는 증명 가능함을 보이면 충분
    2. $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$이고 $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$이므로 $\neg$과 $\vee$로 이루어진 논리식만 고려하면 충분
        1. $Q = P_1 \vee \ldots \vee P_n$이고 각 P_i가 원자명제 또는 원자명제의 부정일 때, Q의 깊이를 n으로 정의
        2. n에 대한 귀납법으로 증명
        3. 문장의 길이는 유한하다는 것이 논증의 핵심

4. 완전성 정리 증명의 개요

1. 만족가능성 보조정리에 따라 “T가 무모순적이라면 T는 만족가능하다”를 증명하면 충분
2. 명제 논리의 완전성에 따라 양화사가 포함된 문장만 따로 고려하면 됨
    1. $\forall x\, P(x) \equiv \neg\exists x\, \neg P(x)$이므로 $\exists$만 고려하면 충분
3. 이론과 언어
    1. 언어: 비논리적 기호(상수, 술어, 함수)의 집합
    2. T = { Dies(Socrates), $\forall x$ IsPerson(x) → Dies(x) }는 언어 L = {Dies(x), IsPerson(x), Socrates}의 이론
4. 증명의 개요: T가 언어 L의 이론이라고 하자.

1. 존재사가 포함된 T의 문장을 만족시킬 형식적 상수 $\{c_1, c_2, \ldots\}$를 L에 추가하여 L'으로 확장
2. L'을 T의 문장들과 연결지을 헨킨 공리를 T에 추가하여 헨킨 이론 T'로 확장
    1. 헨킨 공리: $\exists x\ P(x) \rightarrow P(c)$ 꼴의 공리
    2. 헨킨 이론: 임의의 $\exists x\ P(x)$ 꼴의 문장에 대해 어떤 상수 c가 L에 존재하여 $T \vdash \exists x\ P(x) \rightarrow P(c)$인 이론
3. 귀납법을 통해 T'을 완전한 이론 T"으로 확장
4. 완전한 헨킨 이론은 표준 모델(canonical model)을 가짐을 증명
5. T"의 표준 모델은 T의 모델임을 증명

콤팩트성 정리

1. 내용

1. 이론 T의 모든 유한부분이론이 만족가능하다면 T도 만족가능하다.
2. $T \vDash \phi$일 때, 이론 T의 어떤 유한부분이론 T'에 대하여 $T' \vDash \phi$이다.

2. 함의

1. 1차 이론 T가 임의의 큰 모델을 가진다면 T는 무한 모델을 가진다.
    1. 유한의 역설: 1차 논리 이론은 "…가 유한하다"를 기술할 수 없다.
2. 비표준 해석학
    1. $T = \{\exists x\ 0 < x < 1, \exists x\ 0 < x < 1/2, \exists x\ 0 < x < 1/3, \ldots\}$
    2. T의 모든 유한부분이론이 모델을 가지므로 콤팩트성 정리에 의해 T도 모델을 가짐
    3. 따라서 모든 n에 대하여 $0 < x < 1/n$을 만족하는 수 x가 존재하는 무모순적 수 체계가 가능

3. 증명의 개요

1. 만족가능성 정리에 의해 "이론 T의 모든 유한부분이론이 무모순적이라면 T도 무모순적이다"를 증명하면 충분
2. 귀류법 → T가 모순적이라고 가정, i.e. $T \vdash \phi$ & $T \vdash \neg\phi$
    1. 증명의 길이는 유한하므로 $T \vdash \phi$와 $T \vdash \neg\phi$에 쓰인 전제 명제의 개수는 유한
    2. 사용된 전제 명제의 집합을 S이라고 하면 $S \vdash \phi, \neg\phi$이므로 S는 모순적
    3. 하지만 S는 T의 유한부분이론이므로 가정에 모순

4. 뢰벤하임-스콜렘 정리

프롤로그 - “자연수라는 신기루” (링크)

자연수의 정의 문제

1. **배경**
    1. 비유클리드 기하학
    2. 실해석학의 발전 → 데데킨트 절단
2. **데데킨트-페아노 공리계**
    1. $\neg\exists x\ [\ S(x) = 0\ ]$
    2. $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
    3. $\forall P\ [\ \{\ P(0) \wedge \forall x\ [\ P(x) \rightarrow P(S(x))\ ]\ \}\ \rightarrow \forall x\ P(x)\ ]$
3. **1차 논리와 2차 논리**
    1. 1차 논리(a.k.a. 1차 논리): 변수 양화만 가능 ($\forall x$, $\exists x$)
    2. 2차 논리: 술어 양화도 허용 ($\forall P$, $\exists P$)
        1. 2차 논리의 의미론은 술어의 정의에 의존
        2. 술어를 정의하기 위해서는 집합론이 필요 → 문제적
    3. 1차 논리만 가지고서 자연수를 정의할 수 있을까? 즉, 자연수를 기술하는 정언적 1차 논리 이론이 존재할까?

뢰벤하임-스콜렘 정리

1. **기수 (Cardinality)**
    1. 두 집합 사이에 일대일대응이 존재할 때 두 집합의 기수는 같다.
    2. 가산집합: 자연수와 기수가 같은 집합, e.g. 짝수, 홀수, 정수, 유리수
    3. 비가산집합: 자연수보다 기수가 큰 집합, e.g. |실수| = |자연수의 멱집합|
        1. 대각선 논법

4. 일반적으로, 무한집합 X에 대하여 $X < \mathcal{P}(X)$.
    1. 연속체 가설: $\mathbb{N}$보다 크고 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$보다 작은 집합이 존재하는가?

2. 정리

1. T가 1차 논리 이론이고 무한한 크기의 모델을 가진다면 T는 정언적이지 않다.
2. 구체적으로, 기수 κ의 언어 L에 대해 L-이론 T가 무한 모델을 가진다면, $\kappa \leq \alpha$인 임의의 무한 기수 α에 대하여, T는 기수 α의 모델을 가진다.

3. 뢰벤하임-스콜렘 정리의 증명

1. 하향: 괴델의 완전성 정리로부터 도출
    1. 완전성 정리 증명의 개요: T가 무모순적이라는 가정으로부터 T의 모델을 구축
    2. 증명을 자세히 살펴보면 구축된 모델의 기수가 κ 이하임을 알 수 있음
2. 상향: 콤팩트성 정리의 따름정리
    1. L에 α개의 상수를 추가한 확장된 언어 $L' = L \cup \{c_i\}_{i \leq \alpha}$을 고려
    2. L'-이론 $T' = T \cup \{ c_i \neq c_j \mid i, j \leq \alpha, i \neq j \}$을 고려
        1. T'은 T에 덧붙여 "α개의 서로 다른 상수가 존재한다"고 주장
        2. 콤팩트성 정리에 따라 T'은 모델을 가짐

뢰벤하임-스콜렘 정리의 시사점

1. 자연수의 불확정성

1. PA는 비가산 모델 N_{ucnt}를 가진다.
2. 따라서 PA를 표준 해석과 극단적으로 다르게 해석하면 산술의 표준적 결과들에 모두 동의하는 한편 자연수를 비가산집합으로 이해하는 것이 가능

2. 스콜렘의 역설

1. ZFC는 가산 모델 V_{cnt}을 가진다.
2. 대각선 논법에 따라 ZFC $\vdash \exists x[\mathbb{N} < x]$이므로, V_{cnt}는 (의미론적으로) 가산인 한편 (형태론적으로) 비가산?!
3. ∊를 표준 해석과 극단적으로 다르게 해석하면 집합론의 표준적 결과들에 모두 동의하는 한편 모든 집합을 가산집합으로 이해하는 것이 가능

선택 공리

1. 선택 함수

1. S의 각 집합-원소에서 원소를 하나씩 뽑는 함수
2. 예시
    1. S = { {1, 2}, {a, b, c} }일 때, f : {1, 2} ↦ 1, {a, b, c} ↦ b는 S의 선택함수
    2. S = { {1, -1}, {2, -2}, {3, -3}, … }일 때 f(X) = max X는 S의 선택함수
    3. S = $\mathcal{P}(\mathbb{N})$일 때 f(X) = min X는 S의 선택함수
3. 문제: S = $\mathcal{P}(\mathbb{R})$의 선택함수가 있을까?
    1. 명시적으로 구상할 수는 없음!
    2. 하지만 직관적으로 존재하지 않을 이유가 없음

2. 선택 공리

1. 집합-원소로 이루어진 모든 집합은 선택 함수를 가진다.
2. 비구성적 명제 — 선택 함수가 무엇인지 알려주지 않고 그저 존재성만 보장
3. 러셀의 비유
    1. 무한히 많은 신발이 있을 때 각 켤레에서 신발 한 쪽만 고르는 것은 공리 없이 가능
    2. 하지만 무한히 많은 양말이 있을 때 각 켤레에서 양말 한 쪽만 고르는 것은 공리 없이 불가능
4. 그러나 선택 공리의 반직관적 함의들 때문에 가능하다면 사용이 지양됨
    1. 바나흐-타르스키 정리
    2. 비가측 집합의 존재

3. 선택 공리와 논리학

1. 괴델의 완전성 정리 증명에는 선택 공리가 필요
    1. T가 가산 이론일 때에는 문제가 없지만 T가 비가산 이론일 때 필요 (구체적으로, “증명의 개요” 4번)
    2. 약한 버전의 선택 공리인 초필터 보조정리(Ultrafilter Lemma)로 증명 가능
2. 뢰벤하임-스콜렘 정리 증명에도 선택 공리가 필요
    1. 약한 버전의 선택 공리인 의존적 선택 공리(Dependent Choice)와 동치

5. 괴델의 불완전성 정리

괴델 수

1. **논리식의 괴델 수**
    1. 각 논리 기호와 상수에 수를 부여

¬	1
∨	2
∃	3
∀	4
(	5
)	6
=	7
S	8
0	9
+	10
x	11
y	12
z	13
…	…

    2. 예) $\phi := \exists x \forall y (x + y = x)$ 일 때,
        1. 각 기호를 숫자로 변환: (3, 11, 4, 12, 5, 11, 10, 12, 7, 11, 6)
        2. 소인수의 지수로 올려 계산: $\#\phi = 2^3 \times 3^{11} \times 5^4 \times 7^{12} \times 11^5 \times 13^{11} \times 17^{10} \times 19^{12} \times 23^7 \times 29^{11} \times 31^6$
        3. 어마어마하게 큰 값이지만, 요지는 논리식을 괴델 수로 암호화하거나 역으로 복호화할 수도 있다는 점
2. **대상이론과 메타이론**
    1. 대상이론
        1. 1 + 1 = 2
        2. $\exists x \forall y\ x + y = y$

2. 메타이론
    1. 1 더하기 1은 2이다
    2. PA $\vdash \exists x\ \forall y\ x + y = y$
3. 괴델 수는 메타이론과 대상이론을 연결하는 다리!
    1. “0 + 0 = 0”은 0으로 시작한다 ← 메타이론
    2. $\exists x\ [\ x \times 2^9 = \#(0 + 0 = 0)\ ] \wedge \forall x\ \neg[\ x \times 2^{10} = \#(0 + 0 = 0)\ ]$ ← 대상이론
    3. 하지만 1과 2가 의미하는 바는 (어떤 면에서) 같다!
4. sub(m, n)
    1. 괴델 수 m을 복호화한 논리식의 모든 자유변수에 n을 대입한 논리식의 괴델 수
    2. 예: sub(#(x = 2), 1) = #(1 = 2)
5. IsProvable(n)
    1. 괴델 수 n을 복호화한 논리식이 PA에서 증명 가능함
    2. 예: IsProvable(#(1 = 1))

표현가능성

1. 원시재귀함수

1. 정의
    1. Base Case
        1. Successor: $s(x) = x + 1$
        2. Constant: $k_{m,\,c}(x_1, \ldots, x_m) = c$
        3. Projection: $\pi_{m,\,i}(x_1, \ldots, x_m) = x_i$
    2. Induction Case
        1. Composition: f와 g가 원시재귀라면 $f(g(\mathbf{x}))$도 원시재귀
        2. Recursion: h와 g가 원시재귀라면 다음 두 조건을 만족하는 함수 f도 원시재귀
            1. $f(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x})$
            2. $f(\mathbf{x}, y + 1) = g(\mathbf{x}, y, f(\mathbf{x}, y))$
2. 예시
    1. 다음의 함수 f는 원시재귀 ($h(x, y) = \pi_{2,\,1}(x, y)$, $g(x, y, z) = s(\pi_{3,\,3}(x, y, z))$)
        1. $f(x, 0) = x$

            2. $f(x, y + 1) = s(f(x, y))$
        2. $f(x, y)$는 덧셈을 구현
        3. f의 <u>생성 순열</u>: ($\pi_{2, 1}$, $\pi_{3, 3}$, s, g = C(2, 3), f = R(1, 4))
    3. 자연수를 인자로 받는 모든 표준 함수는 원시재귀적 (e.g. 뺄셈, 곱셈, 지수, 나머지 연산 등)
    4. sub(m, n)은 원시재귀적

2. 원시재귀술어

1. 술어 $P(x_1, \ldots, x_m)$에 대해 다음 두 조건을 만족하는 원시재귀함수 f_P가 존재하면 P는 원시재귀술어
    1. $P(c_1, \ldots, c_m)$ if and only if $f_P(c_1, \ldots, c_m) = 1$
    2. $\neg P(c_1, \ldots, c_m)$ if and only if $f_P(c_1, \ldots, c_m) = 0$
2. f_P를 P의 특성함수(characteristic function)라고 부름
3. 자연수를 인자로 받는 모든 표준 술어는 원시재귀적 (e.g. 홀짝성 판별, 부등호, 등호 등)
4. IsProvable(n)은 원시재귀적일까? (n분 뒤 공개)

3. 재귀함수와 재귀술어

1. μ-연산자
    1. P(x)를 만족하는 가장 작은 x가 n일 때, $\mu x[P(x)] = n$
        1. The smallest x such that …
    2. P(x)를 만족하는 x가 없다면 $\mu x[P(x)]$는 정의되지 않음
2. 재귀함수
    1. 원시재귀함수 g와 원시재귀술어 P에 대해 $f(\mathbf{x}) = g(\ \mu y\ [\ P(\mathbf{x}, y)\ ]\ )$일 때 f는 재귀함수
    2. 즉, 재귀함수는 입력값에 따라 원시재귀술어를 만족하는 최솟값에 대한 함수
3. 술어 P의 특성함수가 재귀함수일 때 P는 재귀술어

4. 처치의 논제

1. <u>재귀성과 계산가능성(computability)은 동치</u>
    1. 즉, 모든 재귀함수는 적절한 기계장치(컴퓨터)로 구현 가능
    2. 역으로 적절한 기계장치로 구현 가능한 모든 함수는 재귀함수
2. 처치의 논제는 논리학의 명제가 아닌, "계산가능성이란 무엇을 의미하는가?"에 대한 논제임
3. 재귀함수, 튜링 기계, 함수형 프로그래밍 등이 모두 동치라는 점은 처치 논제의 근거
    1. 아직까지 인간 또는 기계장치에 의해 계산 가능하지만 재귀함수가 아닌 사례는 보고된 바 없음

        1. 인간 및 기계장치에 의해 계산 가능하지만 원시재귀적이지 않은 함수는 존재 (예: 아커만 함수)

5. 표현가능성

1. 다음이 성립할 때 술어 P는 $\mathbf{P}$에 의해 표현됨
    1. $P(n_1, \ldots, n_m)$ implies $PA \vdash \mathbf{P}(n_1, \ldots, n_m)$
    2. $\neg P(n_1, \ldots, n_m)$ implies $PA \vdash \neg\mathbf{P}(n_1, \ldots, n_m)$
2. 다음이 성립할 때 함수 f는 $\mathbf{f}$에 의해 표현됨
    1. $f(n_1, \ldots, n_m) = k$ implies $PA \vdash \mathbf{f}(n_1, \ldots, n_m) = k$
3. PA가 무모순적이라면 위의 implies는 if and only if로 강화 가능

6. 괴델의 표현가능성 정리

1. 재귀함수와 재귀술어는 표현 가능하다.
2. 증명은 꽤 테크니컬하기 때문에 스킵 (핵심 아이디어: 원시재귀함수의 구성 단계에 대한 귀납법)
3. 따라서 sub는 표현 가능; $sub(n, m) = k$ implies $PA \vdash \mathbf{sub}(n, m) = k$

불완전성 정리

1. 괴델의 대각선 보조정리

1. ϕ가 하나의 자유변수를 가지는 논리식일 때, 어떤 문장 ψ가 존재하여 $PA \vdash \psi \leftrightarrow \phi(\#\psi)$이다.
2. 직관적 예시
    1. $\psi(x)$:= “x가 한국어이다”일 때, ϕ와 $\psi(\#\phi)$의 진릿값이 같은 문장 ϕ가 존재
    2. 실제로 ϕ := “이 문장은 한국어이다” 및 ϕ := “This sentence is in Korean”가 조건을 만족
3. 증명
    1. $\theta(x) := \phi(\mathbf{sub}(x, x))$ ← 이 단계 때문에 sub가 원시재귀적이므로 $\mathbf{sub}$에 의해 표현 가능함을 보인 것!
    2. $\psi := \theta(\#\theta)$

2. 처치의 정리

1. IsProvable(n)은 PA에서 표현 가능하지 않다.
    1. 따름정리: IsProvable(n)은 재귀술어가 아니다.
2. 증명
    1. 귀류법: IsProvable이 $\mathbf{IsProvable}$로 표현된다고 가정

2. 괴델의 대각선 보조정리에 의해 PA ⊢ ψ ↔ ¬**IsProvable**(#ψ)인 문장 ψ가 존재

3. 해당 문장 ψ에 대해,

   1. PA ⊢ ψ if and only if PA ⊢ ¬**IsProvable**(#ψ) (대각선 보조정리)

   2. PA ⊢ ψ if and only if IsProvable(#ψ) (IsProvable의 정의)

   3. IsProvable(#ψ) if and only if PA ⊢ **IsProvable**(#ψ) (**IsProvable**의 정의)

   4. ∴ PA ⊢ ¬**IsProvable**(#ψ) if and only if PA ⊢ **IsProvable**(#ψ) → 모순!

3. 괴델의 불완전성 정리

1. PA는 형태론적으로 불완전하다.

2. 증명

   1. 귀류법: PA가 형태론적으로 완전하다면 IsProvable은 재귀적임을 보이기

   2. PA가 형태론적으로 완전하다면 어떤 문장 ϕ가 주어졌을 때, PA ⊢ ϕ 또는 PA ⊢ ¬ϕ

   3. 수학에서 가능한 모든 증명을 차례대로 시도하면 브루트포싱 알고리즘을 컴퓨터 프로그램으로 구현하여 #ϕ를 입력하면, 가정에 의해 PA ⊢ ϕ와 PA ⊢ ¬ϕ 중 하나의 증명에 반드시 도달

   4. 따라서 IsProvable(n)은 계산가능함 → 처치의 정리에 모순!

4. ω-건전성

1. 괴델의 원래 증명에는 “PA는 ω-건전ω-consistent하다”는 가정이 들어 있음.

   1. 즉, PA ⊢ ∃x P(x)인 동시에 모든 자연수 n에 대해 PA ⊢ ¬P(n)인 술어가 없다는 가정.

   2. “PA는 ω-건전하다”는 “PA는 건전하다(무모순적이다)”를 시사하므로(why?) 괴델의 불완전성 정리에 의해 (PA 내에서) 증명이 불가능한 가정

2. 로저Rosser가 ω-건전성을 가정하지 않고서 불완전성 정리의 결론을 증명하는 데 성공함

5. 철학적 함의

1. (표준 자연수 모델에서) 참이지만 (PA에서) 증명 불가능한 명제가 존재한다.

   1. 일례로 만약 골드바흐의 추측이 참이지만 증명 불가능하다면, $N \vDash$ GB이지만 PA의 어떤 비표준적 모델 M에서 $M \nvDash$ GB이므로 PA $\nvDash$ GB인 동시에 PA $\nvdash$ GB

2. 수학적 실재론

   1. 괴델의 논변: 언어(형식논리학)와 명제의 진릿값이 별개라는 것은 유명론(nominalism)을 거부할 근거

3. 타르스키의 참의 정의불가능성

   1. 모순이 없는 언어는 “참”에 대응하는 표현을 가질 수 없다.

2. 증명: 만약 술어 IsTrue(x)가 언어 L에서 $\mathrm{IsTrue}(x)$로 표현 가능하다면, 괴델의 대각선 보조정리에 의해 $L \vdash \psi \leftrightarrow \neg\mathrm{IsTrue}(\#\psi)$인 문장 ψ가 존재

3. 함의: 언어 L의 어떤 문장이 참이냐는 논의는 언어 L에서 불가능하며 메타언어 L’을 필요로 한다

Part 2 — 언어철학

6. 프레게의 뜻과 지시체

동일성에 관한 수수께끼

1. 네 가지 문장

1. 샛별은 개밥바라기이다. (T, 후험적)
2. 샛별은 샛별이다. (T, 선험적)
3. 철수는 샛별이 개밥바라기인줄 모른다. (T)
4. 철수는 샛별이 샛별인줄 모른다. (F)

2. 두 가지 원리

1. 라이프니츠 법칙: A = B라면, ϕ(A)의 진릿값과 ϕ(B)의 진릿값은 같다.
2. 합성성: 문장의 의미는 그 문장을 구성하는 요소들의 의미에 의해 결정된다.
    1. 어떻게 두 원리를 유지하는 한편 앞서 살펴 본 네 가지 문장의 선/후험성 및 진릿값 차이를 설명할 수 있을까?

프레게 — 뜻과 지시체

1. 지시체

1. 어떤 표현의 지시체란, 그 표현을 포함하는 문장의 진릿값에 관여하는 요소
2. 라이프니츠 법칙과 합성성을 만족
    1. “샛별”과 “개밥바라기”의 지시체가 같으므로 “샛별은 샛별이다”와 “샛별은 개밥바라기이다”의 진릿값은 같음
    2. “샛별은 토성이 아니다”의 진릿값은 “샛별”과 “토성”의 지시체와, 문장의 논리적 구조(A는 B가 아니다)에 의해 필요충분하게 결정됨
3. 이름의 지시체는 그것의 담지자
4. 문장의 지시체는 그것의 진릿값

2. 지시체는 의미의 전부가 아니라는 증거

1. 담지자가 없는 이름의 문제
    1. “프랑스의 왕은 대머리이다”라는 문장에서 “프랑스의 왕”의 지시체는 무엇인가?

        2. 프랑스의 왕은 존재하지 않으므로 "프랑스의 왕"이 가리키는 지시체는 없음
        3. 그러나 만약 지시체가 의미의 전부라면, 지시체가 결여된 표현을 포함하는 문장은 의미가 결여된 문장이어야 할 텐데 "프랑스의 왕은 대머리이다"라는 문장은 분명 의미를 가짐
    2. <u>믿음 문맥의 문제</u>
        1. "철수는 러셀이 <u>《논리철학논고》의 저자</u>라고 믿는다."
        2. "철수는 러셀이 <u>러셀의 가장 유명한 제자</u>라고 믿는다."
        3. 밑줄친 표현의 지시체는 같으므로 라이프니츠 법칙에 의해 두 문장의 진릿값은 같아야 하지만 1은 참이고 2는 거짓인 상황이 충분히 가능
    3. <u>정보성의 문제</u>
        1. "러셀은 <u>비트겐슈타인의 스승</u>이다."
        2. "러셀은 <u>러셀</u>이다."
        3. 밑줄친 표현의 지시체는 같고, 1과 2의 진릿값 또한 같지만, 1은 우리에게 정보를 주는 데 반해 2는 아무런 정보를 주지 않음.

3. **뜻**
    1. 지시체만을 의미의 요소로 상정할 때 발생하는 문제를 해결하기 위해 도입
        1. 어떤 표현의 뜻이란, 그 표현의 지시체가 언어 사용자에게 드러나는 방식 (mode of presentation)
        2. 뜻은 지시체를 결정
    2. 이름의 뜻은 그것을 우리가 이해하는 방식
    3. 문장의 뜻은 그것이 표현하는 생각

4. **뜻의 성질**
    1. 지시체와 마찬가지로 합성성의 원리와 라이프니츠 법칙을 만족
        1. 라이프니츠 법칙: A와 B의 뜻이 같으면 $\phi(A)$와 $\phi(B)$의 뜻이 같다.
        2. 합성성의 원리: 문장의 뜻(의미)는 그 문장을 구성하는 요소들의 뜻으로 결정된다.
    2. 지시체가 결여되어 있지만 뜻은 있는 경우가 가능 → 담지자가 없는 이름의 문제를 해결
    3. 어떤 표현 P에 대해, (믿음 문맥에서의 P의 지시체) = (일반 문맥에서의 P의 뜻) → 믿음 문맥의 문제를 해결
    4. 특정 표현의 지시체를 몰라도 뜻은 숙지할 수 있음 → 정보성의 문제를 해결

5. **뜻의 객관성**
    1. 철학자들이 언어에 의미가 있다고 생각하는 이유: <u>소통의 문제</u>
    2. 거꾸로 말하자면, 소통의 문제를 적절히 설명하지 못하는 의미 이론은 부적격

3. 뜻이란 무엇인가?
    1. 로크: 개인의 사적 심상
        1. 같은 표현을 각자 다른 뜻으로 이해할 가능성이 존재 (e.g. 퀄리아 반전)
        2. 실제로 로크는 언어 표현의 뜻이 개인마다 다를 가능성을 시인
        3. 프레게의 공격: 로크의 의미 이론은 소통의 문제를 적절하게 설명하지 못한다
    2. 프레게: 객관적 대상
        1. 특정 언어 표현을 올바르게 사용하는 사람들은 모두 같은 뜻을 공유
        2. 구체적으로 뜻이 어떤 유형의 객관적 대상인지에 관해서는 해석이 갈림
            1. 뜻은 형이상학적 대상 (프레게의 원래 의도?)
            2. 뜻은 기술구 (프레게의 표준적 해석?)
            3. 뜻은 규칙 (더밋의 프레게 해석)
            4. 뜻은 해당 표현이 언어 사용자에게 일으키는 행동들 (행동주의)

7. 러셀의 기술 이론

프레게 이론의 문제

1. **객관성의 문제**
    1. "아리스토텔레스"의 뜻이란 무엇인가?
2. **분석철학 전복의 문제**
    1. 분석철학의 목표: 철학적 개념의 의미를 명료하게 규명하는 것, 예) "지식은 정당화된 참된 믿음이다."
    2. 그러나 프레게에 따르면 "지식"과 "정당화된 참된 믿음"은 뜻과 지시체가 모두 같음
    3. 따라서 "지식은 정당화된 참된 믿음이다"와 "지식은 지식이다"는 아무런 정보를 주지 않는 문장
3. **간접적 뜻의 문제**
    1. "철수는 러셀이 《논리철학논고》의 저자라고 믿는다."
        1. 밑줄의 지시체는 "《논리철학논고》의 저자"의 일반적 뜻
        2. 그렇다면 밑줄의 뜻은?
        3. "영희는 철수가 버트런드 러셀이 《논리철학논고》의 저자라고 믿는다고 믿는다."
4. **담지자가 없는 이름의 문제**
    1. 프레게에 따르면 "프랑스의 왕은 대머리이다"는 뜻이 있지만 지시체가 결여되어 있으므로 진릿값이 공백
    2. 진리 대응론: 문장이 의미하는 사태와 세계가 일치하면 해당 문장은 참, 그렇지 않으면 거짓
    3. 진리 대응론에 따르면 "프랑스의 왕은 대머리이다"는 의미하는 사태(뜻)이 있으므로 참 또는 거짓이어야 함

러셀의 지시 이론

1. **러셀의 수정된 지시체 이론**
    1. 프레게: 한정기술구(definite description)의 지시체는 대상이다.
        1. "현재 영국의 왕"의 지시체는 찰스 3세
    2. 러셀의 첫번째 주장: 한정기술구의 지시체는 2차 함수이다.

      1. 2차 함수: 술어를 인자로 받아 진릿값을 출력하는 함수
      2. “현재 영국의 왕”의 지시체는 kingOfGB: $P \mapsto \exists x[\ IsKingOfGB(x) \wedge P(x) \wedge \forall y\ (IsKingOfGB(y) \rightarrow x = y)\ ]$
         1. 즉, 인자로 받은 술어 P에 대해, 다음을 만족하는 x가 존재할 때, 그리고 오직 그 경우에만 참을 반환
            1. x가 현재 영국의 왕이다.
            2. x가 P를 만족한다.
            3. 1과 2를 만족하는 x가 유일하다
         2. kingOfGB(IsMale) = True
         3. kingOfGB(IsScottish) = False
      3. “현재 프랑스의 왕”의 지시체는 kingOfFR: $P \mapsto \exists x[\ IsKingOfFR(x) \wedge P(x) \wedge \forall y\ (IsKingOfFR(y) \rightarrow x = y)\ ]$
         1. kingOfFR(IsBald) = False ($\because$ IsKingOfFR(x)를 만족하는 x가 존재하지 않음)
   3. 러셀의 두번째 주장: 일반적인 이름은 “위장된” 한정기술구이다.
      1. “비트겐슈타인”이라는 이름은 사실 한정기술구 “《논리철학논고》의 저자”, “러셀의 가장 유명한 스승” 등
      2. 사람마다 같은 이름에 다른 한정기술구를 부여할 수 있으며, 그것이 해당 사람이 그 이름을 이해하는 방식
   4. 러셀의 세번째 주장: 오직 지시사만이 진정한 이름이다. (즉, 오직 지시사만이 대상을 지시체로 가진다.)
      1. 누군가 세종대왕 동상을 가리키며 “저거 좀 봐!”라고 한다면, “저거”의 지시체는 세종대왕 동상

2. **러셀의 수정된 뜻 이론**
   1. 러셀의 네번째 주장: 프레게의 뜻 개념은 모순적이다.
      1. 그레이 연가 논증 ← 상당히 난해해서 아직까지도 아무도 러셀이 무슨 말을 하려던 건지 모름
   2. 러셀의 다섯번째 주장: 프레게의 뜻 개념은 불필요하다.
      1. 프레게의 뜻 개념에 의존하지 않아도 러셀의 기술 이론만 있으면 언어철학의 문제를 모두 해결
         1. 담지자가 없는 이름의 문제 → kinfOfFR(isBald)는 거짓
         2. 믿음 문맥의 문제 → “철수는 모든 술어 P에 대해 bertrandRussell(P)와 authorOfTractatus(P)가 동치라고 믿는다”
         3. 정보성의 문제 → “모든 술어 P에 대해 wittgenstein(P)와 authorOfTractatus(P)는 동치이다.”

러셀 이론의 문제

1. **함수의 외연적 정의와 충돌**
   1. 함수의 외연적 정의: $f = g$ if and only if $\forall x\ f(x) = g(x)$

2. 함수의 외연적 정의에 따르면 wittgenstein = authorOfTractatus이므로 “비트겐슈타인은 《논리철학논고》의 저자이다”와 “비트겐슈타인은 비트겐슈타인이다”는 같은 의미임!

3. 외연주의-내연주의 떡밥

2. 크립키의 공격

1. 다음 주차에 계속

8. 크립키: 양상성과 이름

크립키 이전 언어철학의 지평

1. **P1: 의미는 투명하다. (프레게)**
    1. 표현 e_1과 e_2의 의미가 동일하다면, 두 표현을 모두 이해하는 화자는 e_1과 e_2의 의미가 동일함을 안다.
    2. 예시: e_1 = “금성”, e_2 = “태양계의 두 번째 행성” → 두 표현을 모두 이해한다면 두 표현이 동의어임을 안다.
2. **P2: 표현의 의미는 대상이 아닌 기술구이다. (러셀)**
    1. 표현 e가 대상 o를 지칭할 때, e의 의미는 o가 아니라 o가 유일하게 만족하는 기술구 P이다.
    2. 예시: e = “샛별”, o = 금성, P = 새벽에 달 다음으로 가장 밝은 천체
3. **P3: 선험적a priori, 필연적necessary, 그리고 분석적analytic은 모두 같다. (논리실증주의)**
    1. 선험적: 경험과 무관하게 참
    2. 필연적: 어떠한 가능 세계에서도 참
    3. 분석적: 의미와 논리적 형식에 의해 참
    4. 예시1: 총각은 결혼하지 않은 남성이다. → 선험적, 필연적, 분석적
    5. 예시2: 칸트는 평생 총각이었다. → 후험적, 우연적, 종합적
4. **P4: 필연성은 표현-상대적이며, 대상 자체는 필연적 성질을 가지지 않는다. (콰인)**
    1. 예시: “금성은 행성이다”는 필연적 명제이지만 “샛별은 행성이다”는 필연적 명제가 아님.

양상 논리Modal Logic

1. **양상 논리의 배경**
    1. 실질 조건문Material Implication의 역설: “정담이가 카이스트에 입학하지 않았다면 카이스트는 폐교했다.”
        1. 직관적으로 거짓이지만 명제 논리에 따르면 조건이 거짓으므로 문장 전체는 참
    2. 루이스의 해결책
        1. 양상 연산자 □와 ◇를 도입

        1. $\Box P$를 “P는 필연적이다”라고 읽음.
        2. $\Diamond P$를 “P가 가능하다”라고 읽음.
        3. $\Diamond P = \neg\Box(\neg P)$
    2. 엄밀 조건문Strict implication: $p \twoheadrightarrow q := \Box(p \rightarrow q)$
        1. (정담이가 카이스트에 입학하지 않았다) → (카이스트는 폐교했다) : 참
        2. (정담이가 카이스트에 입학하지 않았다) ↠ (카이스트는 폐교했다) : 거짓

2. **양상 논리의 증명 체계**
    1. 루이스가 다섯 가지 양상 논리 증명 체계를 제시
    2. S4 공리계
        1. Axiom K: $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
        2. Axiom T: $\Box p \rightarrow p$
        3. Axiom 4: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$
    3. S5 공리계
        1. S4에 Axiom 5를 추가: $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$

크립키 의미론

1. **양상 논리의 의미론**
    1. 루이스가 양상 논리의 증명 체계를 제시했음에도 의미론은 한동안 제시되지 않음
    2. 1959년에 크립키가 양상 논리의 의미론을 고안함: 크립키 의미론

2. **양상 논리의 모델: $M = \langle W, R, \alpha, I, a, \iota \rangle$**
    1. W: 가능 세계possible world의 집합
    2. R: 세계 간 접근 가능성 관계accessibility relation
    3. α: 실제 세계 ($\alpha \in W$)
    4. I: 가능한 대상들의 집합
    5. a: W에서 I로 가는 함수
    6. ι: 술어 P에 대해, w에서의 P의 외연을 결정하는 함수

3. **양상 논리 모델의 예시**

1. 술어 Dies, IsPhilosopher, IsHuman으로 이루어진 언어를 고려

2. $W = \{w_1, w_2, w_3\}$

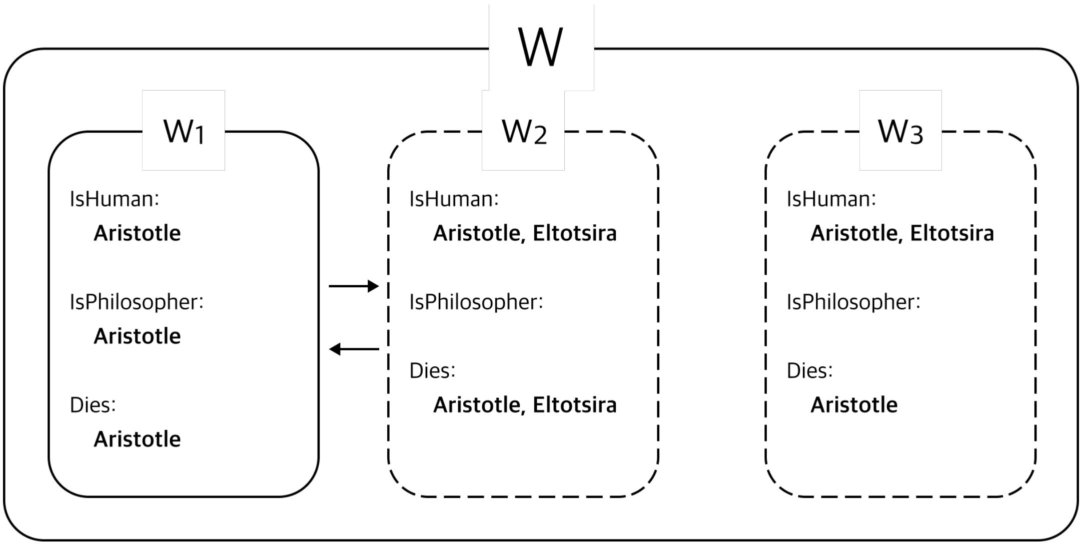
3. $R = \{(w_1, w_2), (w_2, w_1)\}$

4. $\alpha = w_1$

5. I = {Aristotle, Eltotsira}

6. $a(w_1)$ = {Aristotle}, $a(w_2)$ = {Aristotle}, $a(w_3)$ = {Aristotle, Eltotsira}

7. ι(IsHuman, w_1) = {Aristotle}
   ι(IsHuman, $w_{2,\,3}$) = {Aristotle, Eltotsira}
   ι(IsPhilosopher, w_1) = {Aristotle}
   ι(IsPhilosopher, $w_{2,\,3}$) = { }
   ι(Dies, $w_{1,\,2,\,3}$) = {Aristotle}



4. 양상 연산자의 진릿값

1. α에서 접근 가능한 모든 세계에서 P가 참일 때, $M \vDash \Box P$

2. α에서 접근 가능한 어떤 세계에서 P가 참일 때, $M \vDash \Diamond P$

3. 예시

   1. $M \vDash \Box[\forall x\ \text{IsHuman}(x) \rightarrow \text{Dies}(x)]$

   2. $M \nvDash \Box\text{IsPhilosopher}(\text{Aristotle})$ ($M \vDash \Diamond\neg\text{IsPhilosopher}(\text{Aristotle})$)

   3. $M \vDash \Diamond\exists x[x = \text{Eltotsira}]$

5. 크립키의 양상성 정리

1. R이 동치 관계일 때, 즉, R이 추이적(xRy, yRz → xRz), 반사적(xRx), 대칭적(xRy → yRx)일 때 다음이 성립
    1. 완전성 정리: S5는 크립키 의미론에서 참인 모든 양상 논리 문장을 증명한다.
    2. 건전성 정리: S5는 크립키 의미론에서 거짓인 양상 논리 문장을 증명하지 않는다.

6. 고정 지시어

1. t가 모든 가능세계에서 지시하는 대상이 동일할 때, t를 고정 지시어rigid designator라고 함.
2. 크립키 의미론은 고정 지시어를 인정함.
3. 예시: "Aristotle"이 지시하는 대상은 w_1, w_2, w_3에서 모두 같음.

《이름과 필연》

1. 《이름과 필연》의 배경

1. 양상성에 대한 언어철학적 고찰
2. 논지의 개요
    1. 올바른 언어철학 이론은 양상성을 적절히 설명해야 한다.
    2. 크립키 의미론은 양상성을 적절히 설명하는 유일한 이론이다.
    3. 크립키 의미론은 이름을 고정 지시어로 취급한다.
    4. 고정 지시어가 포함된 언어에서 P1-P4는 성립하지 않는다.
    5. 따라서 올바른 언어철학 이론은 P1-P4를 폐기해야 한다.

2. P4와 P3에 대한 반론

1. t가 o를 지시하는 고정 지시어일 때, $\Box\exists x[x = t \rightarrow P(x)]$가 참이라면 o는 필연적으로 P임.
    1. 예시1) "분자로 이루어져 있음"은 아리스토텔레스의 필연적 성질임.
    2. 예시2) "행성임"은 금성의 필연적 성질임.
2. P가 o의 필연적 성질일 때, P(t)는 필연적이지만 후험적일 수 있음.
    1. 예시1) "아리스토텔레스는 분자로 이루어져 있다"는 후험적인 필연적 명제임.
    2. 예시2) "샛별은 개밥바라기이다"는 후험적인 필연적 명제임.

3. P2에 대한 반론

1. 강한 P2: 이름의 의미는 곧 한정기술구이다.

        1. 반론: “아리스토텔레스”의 의미가 “플라톤의 가장 유명한 제자”라면 “아리스토텔레스는 플라톤의 가장 유명한 제자이다”는 필연적 명제이지만, 아리스토텔레스가 플라톤의 가장 유명한 제자가 아닌 가능세계가 있음.

    2. 약한 P2: 이름의 지시체는 한정기술구로 특정된다.

        1. 반론1) 한정기술구는 이름의 지시체를 특정하는 데 충분하지 않다.

            1. 괴델-슈미트 사례: “괴델”이라는 이름의 지시체가 한정기술구 “불완전성 정리를 발견한 사람”이었는데, 알고보니 불완전성 정리를 발견한 사람은 슈미트였다면?

            2. 페아노-데데킨트 사례: “페아노”라는 이름의 지시체를 과연 기술구로 특정할 수 있는가?

시도	실패 이유
자연수의 공리계를 처음으로 제시한 인물	사실 자연수의 공리계를 처음으로 제시한 사람은 데데킨트임.
자연수의 공리계를 처음으로 제시한 인물로 대부분의 사람이 지시하는 인물	순환 논증; a가 “대부분의 사람”에 속한다고 하자. 그렇다면 a는 어떻게 “페아노”라는 이름으로 페아노를 지시하는가?
대부분의 사람이 “페아노”라는 이름을 통해 지시하는 인물	마찬가지로 순환 논증
이름이 “페아노”였던 수학자	그런 수학자가 여러 명 있었다면?
페아노 전문가들이 “페아노”라는 이름을 통해 지시하는 인물	누가 과연 페아노 전문가?

        2. 반론2) 한정기술구는 이름의 지시체를 특정하는 데 필요하지 않다.

            1. 위와 같이 “페아노”라는 이름의 지시체를 한정기술구로 특정할 수 없음에도 불구하고 우리는 “페아노”라는 이름을 사용하여 특정 인물을 지시할 수 있음.

        3. 한정기술구가 이름의 지시체를 특정하는 경우가 드물게 존재함 → 선험적인 우연적 명제의 원인

            1. 예시: “미터 원기의 길이는 1m이다.” (1m의 지시체는 “미터 원기의 길이”라는 한정기술구로 특정됨)

4. 크립키의 이름 이론

1. 대상 o는 이름 세례식name-baptism 때 이름 n을 부여받음.
2. 이름 세례식에 참석한 사람들은 n을 통해 o를 지시함.
3. 이름 세례식 참석자들이 다른 사람들과 대화하면서 이름의 지시-사슬chain of reference이 자라남.
4. 이름 n의 지시체 = n의 지시-사슬 발원지인 대상 o → 의미 외재주의 (P1에 대한 반론)

9. 비트겐슈타인에서 콰인으로

논리철학논고와 논리실증주의

1. 《논리철학논고》

1. 전기 비트겐슈타인의 대표작으로, 언어는 어떻게 의미를 획득하는가를 다룸.
2. 언어와 세계에 대한 환원주의적 입장

세계	언어
대상object: 가장 기본적인 존재자	이름name: 대상을 지시하는 표현
원자사태state of affair: 대상들의 조합	원자명제atomic proposition: 이름들의 조합
사태case: 원자사태의 복합체	명제proposition: 원자명제의 복합체

3. 그림 이론: 언어가 의미를 가질 수 있는 이유는 언어와 세계의 논리적 구조가 동일isomorphic하기 때문이다. (원자명제는 특정 원자사태에 대응되는 그림을 그림으로써 의미를 가진다)
    1. 그림 이론의 함축: 명제의 3분법
        1. 세계의 논리적 구조에 부합하고 특정 그림을 그리는 명제는 유의미하다.

            e.g. 영국의 왕은 찰스 3세이다.
        2. 세계의 논리적 구조에 부합하지만 아무런 그림을 그리지 않는 명제는 무의미senseless하다.

            e.g. P이고 P → Q라면 Q이다.
        3. 세계의 논리적 구조에 부합하지 않아 아무런 그림을 그리지 않는 명제는 넌센스nonsense하다.

            e.g. 무색의 초록색 생각들이 격렬히 잠을 잔다.
            무는 무화한다Nothing nothings.

2. 논리실증주의

1. 빈 학파: 1920년대 오스트리아 빈에서 일군의 철학자, 수학자, 과학자들이 결성한 모임
2. 논리실증주의: 논리적 분석과 경험적 검증을 바탕으로 철학의 문제를 해소(제거)할 수 있다는 빈 학파의 입장
3. 《논리철학논고》의 영향을 받아 명제를 세 분류로 나눔.

e.g. 선험적a priori 명제: 문장의 논리적 형식에 의해 참이거나 거짓인 명제

e.g. 후험적a posteriori 명제: 세계의 사태에 따라 참이거나 거짓인 명제

e.g. 무의미nonsense 명제: 아무런 의미를 가지지 않아 진릿값을 결여하는 명제

검증 원리

1. 검증 원리

1. 후험적 명제와 무의미 명제를 구분하는 기준
2. “명제의 의미는 그 명제의 검증 방법이다The meaning of a statement is its method of verification.”

   e.g. “물은 100°C에서 끓는다”라는 명제는 끓는 물에 온도계를 넣음으로써 검증할 수 있으므로 유의미한 명제

   e.g. “무는 무화한다”라는 명제는 검증 방법을 가지지 않으므로 무의미한 명제

2. 에이어의 검증 원리

1. “검증”이라는 것이 정확히 무엇을 의미하는지 해명하기 위한 시도
2. 1차 시도: ϕ가 검증 가능하다 iff 어떤 관측 명제 O와 명제 $\psi_1, \ldots \psi_n$이 존재하여 $\phi, \psi_1, \ldots \psi_n \vDash O$이지만 $\psi_1, \ldots \psi_n \nvDash O$이다.
   1. 모든 명제를 검증 가능한 명제로 만들어버리는 치명적인 결함을 가지고 있음 (N이 임의의 명제이고 O가 어떤 관측 명제일 때 $N, N \rightarrow O \vDash O$ 이지만 $N \rightarrow O \nvDash O$이므로 N은 검증 가능)
3. 2차 시도
   1. ϕ는 직접적으로 검증 가능하다 iff 어떤 관측 명제 O와 관측 명제 $O_1, \ldots, O_n$이 존재하여 $\phi, O_1, \ldots, O_n \vDash O$ 이지만 $O_1, \ldots, O_n \nvDash O$이다.
   2. ϕ는 간접적으로 검증 가능하다 iff 어떤 직접적 검증 가능 명제 D와 명제 $\psi_1, \ldots, \psi_n$이 존재하여 $\phi, \psi_1, \ldots, \psi_n \vDash D$이지만 $\psi_1, \ldots, \psi_n \nvDash D$이다. 이 때, ψ_i는 다음 조건 중 하나를 만족해야 한다.
      i. 분석적 명제이다.
      ii. 직접적으로 검증 가능하다.
      iii. 간접적으로 검증 가능함을 ϕ에 의존하지 않고 보일 수 있다.

3. 검증 원리의 한계

1. 에이어의 2차 시도 또한 모든 명제를 검증 가능한 명제로 만들어버리는 치명적인 결함을 가지고 있음.
   1. 처치의 반례) $S = (\neg O_1 \wedge O_2) \vee (\neg N \wedge O_3)$일 때 S는 직접적으로 검증 가능하며 $N, S \vDash O_2$이지만 $S \nvDash O_2$이므로 N은 간접적으로 검증 가능함.
2. 이후 에이어의 검증 원리를 수정하려는 시도가 지속적으로 있었지만 만족스럽지 않음.

콰인, 《경험주의의 두 독단》

1. 개요

1. 논리실증주의를 와해한 결정적인 논문
2. 경험주의의 첫 번째 독단: 분석-종합 구분
    1. 분석적analytic 명제와 종합적synthetic 명제는 구분 가능하다.
    2. 콰인의 반박: 분석성을 정의하려는 시도는 모두 순환적이다.
3. 경험주의의 두 번째 독단: 환원주의
    1. 모든 지식은 오직 감각 자료sense data로 구성된다.
    2. 콰인의 반박: 환원성을 정의하려는 그간의 시도는 실패했다.

2. 첫 번째 독단: 분석-종합 구분

1. "모든 a는 b이다"가 분석적이라는 것은 무슨 의미인가?
    1. "모든 a는 b이다"는 분석적이다 iff a와 b가 사전에 동의어로 등재되어 있다.
        - 부적절 ∵ 사전은 이미 알려진 동의어의 기록에 불과
    2. "모든 a는 b이다"는 분석적이다 iff 임의의 술어 P에 대해 P(a)와 P(b)의 진릿값이 같다.
        - 부적절 ∵ a: "총각", b: "결혼하지 않은 남성", P(x): "x는 두 글자이다."
    3. "모든 a는 b이다"는 분석적이다 iff 인식론적 의미cognitive meaning에만 관련하는 임의의 술어 P에 대해 P(a)와 P(b)의 진릿값이 같다.
        - 부적절 ∵ "임의의 술어"의 외연은 언어-상대적임.
            - 만약 언어 L이 양상 표현을 포함하지 않는 언어라면 "샛별"과 "개밥바라기"는 동의어임.
    4. "모든 a는 b이다"는 분석적이다 iff 양상 표현이 포함된 언어 L에 속하고 인식론적 의미에만 관련하는 임의의 술어 P에 대해 P(a)와 P(b)의 진릿값이 같다
        - 부적절 ∵ 양상 표현(e.g. 필연성)의 의미란 무엇인가?
            - "모든 a는 필연적으로 b이다" iff "모든 a가 b라는 것은 분석적 참이다"로 정의하면 순환 논증!
2. 콰인의 결론: 분석적 명제와 종합적 명제 사이에는 뚜렷한 경계가 없다.
3. 질문: 크립키의 양상 의미론은 콰인의 논증에 반박할 수 있는가?

3. 두 번째 독단: 환원주의

1. 논리실증주의의 환원주의 논제
    1. 모든 참은 분석적이거나 종합적이다.

        1. 분석적 참은 논리적 분석을 통해 검증할 수 있다.
        2. 종합적 참은 감각 자료를 통해 검증할 수 있다.
    2. 문장의 의미는 그것의 검증 기준이다.
    3. 따라서 문장의 의미는 일반적으로 감각 자료의 논리적 복합체이다logical compound of sense data.

       e.g. "고양이는 책상 위에 있거나 상자 안에 있다"의 의미는 "고양이", "책상", "상자"에 대응하는 감각 자료와 "또는", "있다" 등의 논리적 연결사로 분석됨.
2. 콰인의 주장: 환원주의자는 자연 언어의 문장을 감각 자료의 논리적 복합체로 환원하는 것이 실제로 가능함을 보일 입증 책임burden of proof이 있다.
    1. 카르납이 《세계의 논리적 구조》에서 감각 자료와 논리적 연결사만 가지고서 자연 언어를 구축하려고 시도하였으나 실패를 자인함.

4. 콰인의 대안: 전체론holism

1. 콰인의 주장: 특정 명제를 독립적으로 떼 놓고서 검증하기란 불가능하다.
    1. "물은 100°C에서 끓는다"라는 명제를 검증하려고 끓는 물에 온도계를 넣었는데 102°C가 나온 경우, 우리는 "물은 100°C에서 끓는다"라는 명제를 폐기하는 대신 "온도계가 고장났다", "순수한 물이 아니었다", "기포 발생이 저해되어 과가열되었다", "내가 잘못 보았다" 등 수많은 다른 명제를 대신 선택할 수 있음.
    2. 따라서 검증의 대상이 되는 것은 하나의 명제가 아니라, 믿음의 망web of beliefs 전체임.
        1. 위의 경우에서 검증되는 것은 "물은 100°C에서 끓는다"는 명제가 아닌 "이것은 순수한 물이고, 온도계는 정상적이고, 과가열이 일어나지 않을 것이며, 물은 100°C에서 끓으며…" 등의 믿음의 망임
2. 함의
    1. <u>확실성certainty의 재정의</u>: 명제가 확실하다는 것은 그 명제가 믿음의 망 깊숙한 곳에 자리잡고 있다는 것 이상에 지나지 않는다.
    2. <u>극단적 전체론</u>: 이론과 맞지 않는 관측 결과가 나왔을 때 논리학을 폐기하는 대신 과학 이론을 폐기하는 것은 정당한 철학적 이유가 있기 때문이 아니라 그것이 더 실용적이기 때문이다.
        1. 믿음의 망이 문제를 맞이할 때 주변부에 있는 믿음(과학 이론)을 폐기하는 것이 핵심부에 있는 믿음(논리학)을 폐기하는 것보다 실용적이다.
        2. 논리학을 폐기하는 것이 더욱 실용적인 상황에서는 논리학을 폐기함이 마땅하다.
    3. <u>자연주의</u>: 학문 간 경계의 해체
        1. 과학, 철학, 그리고 수학은 상호 연관을 맺으며 거대한 믿음의 망을 구축한다.
        2. 과학적 방법론으로 철학적 논제를 검토할 수 있고 그 역도 가능하다.

10. 참과 의미의 선행 문제

닭이냐 계란이냐?

1. **의미가 참에 선행한다는 입장**
    1. “눈은 희다”라는 문장은, 그것이 의미하는 바(눈이 흼)가 눈과 관련된 세계의 실제 사태와 일치하기 때문에 참이다.
    2. 문장의 진릿값은 의미와 세계의 일치 여부이다.
    3. 의미란 무엇인지 설명해야 함.
2. **참이 의미에 선행한다는 입장**
    1. “눈은 희다”라는 문장은 참이기 때문에, 눈과 관련된 세계의 실제 사태(눈이 흼)가 그것의 의미이다.
    2. 문장의 의미는 그것이 참일 조건truth-condition이다.
    3. 참이란 무엇인지 설명해야 함.

참에 대한 입장들

1. **전통적 삼분법**
    1. 대응론Correspondence Theory of Truth: 참은 문장의 의미와 세계의 사태 사이의 일치이다. (문장-세계)
        1. 대다수의 학자가 속함.
    2. 정합론Coherence Theory of Truth: 참은 믿음 체계가 일관성을 유지하는 사태이다. (문장-문장)
        1. 형이상학적으로 검소하지만, 일관적으로 틀린 믿음들 또한 일관성을 유지할 수 있다는 문제가 있음.
        2. 콰인의 전체론이 현대적인 버전
    3. 실용론Pragmatist Theory of Truth: 참은 그것을 믿는 것이 유용한 경우이다. (문장-효용)
        1. 19세기 미국 실용주의 학파의 입장
        2. 여러 내적인 문제로 현대에는 말소된 상태
2. **현대의 삼분법**
    1. 실재론Realism: 참은 언어와 세계의 사태 사이의 관계이다 → 진리 조건적 의미론truth-conditional semantics

2. 반실재론Antirealism: 참은 언어와 사태 사이의 관계가 아닌 언어와 다른 대상(주로 행동)과의 관계이다 → 검증 조건적 의미론verification-conditional semantics

3. 수축론Deflationism: 참은 언어에서 아무런 기능도 수행하지 않거나, 적어도 의미론적인 기능을 수행하지 않는다.

타르스키의 참 정의

1. 타르스키의 참의 정의 불가능성 정리

1. 모순이 없는 언어는 “참”에 대응하는 표현을 가질 수 없다.
2. 괴델의 불완전성 정리의 함축, 자료의 5장을 참조.
3. 따라서 “언어-L-에서의-참”을 언어 L에서 정의할 수 없음. (c.f. 거짓말쟁이의 역설)

2. 대안: 대상언어와 메타언어의 구분

1. “언어-L-에서의-참”을 언어 L*에서 정의.
    1. L은 적절한 번역을 통해 L*으로 내장될embed 수 있어야 함.
    2. L*은 L의 문장들을 지시할 적절한 방식을 가져야 함.

        e.g. L이 영어이고 L*이 한국어일 때, “Snow is white”는 “눈은 희다”로 번역되고, “눈은 희다”는 “Snow is white”를 지시함.
2. 참의 정의가 만족해야 할 두 가지 조건
    1. 형식적 올바름formally correct: 수학적으로 엄밀하고, 모순을 일으키지 않음.
    2. 실질적 적합성materially adequate: 참의 정의로부터 모든 T-스키마 문장을 도출할 수 있어야 함.
        1. T-스키마schema: “_______”는 참이다 iff _______이다.

3. 결과: 모델 이론적 참

1. 위의 조건을 만족하는 참을 정의하는 과정에서 모델 이론이 탄생함
2. 모델 이론의 참(⊨)은 귀납적으로 정의되며, 형식적으로 올바르고 실질적으로 적합함.

데이비슨-더밋 논쟁

1. 데이비슨의 주장

1. 타르스키의 참 정의를 자연 언어로 확장을 시도
2. 참에 대한 이론을 제시하는 것은 곧 의미에 대한 이론을 제시하는 것이다. (참이 의미를 선행한다)
3. 진리 조건적 의미론의 대표적인 학자

4. 후대 학자들에 의해 여러 내적인 모순들이 지적됨.

2. 더밋의 주장

1. 논리실증주의의 검증주의를 계승
2. 문장의 의미는 그것의 검증 방식이고, 문장이 참이라는 것은 그것이 해당 검증을 통과한다는 것이다. (의미가 참을 선행한다)
3. 검정 조건적 의미론의 대표적인 학자
4. 수학에 대대적인 수정(귀류법의 사용 금지 등)을 요구하는 무리한 함의를 가지고 있음.